M 2526

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

0 - MAI 2014

22.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXV.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1929.

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
4. Aritmetica lui Niculae Milescu Spătarul . . † *V. Cristescu.*
5. Note matematice: 1 — 4.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 181.
8. Probleme rezolvate: 1584, 2809, 3615, 3723, 3724, 3757, 3788.
9. Exerciţii: 1 — 3.
10. Probleme propuse: 3811 — 3820.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
a „ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

BUCUREŞTI
IMPRIMERIILE STATULUI
1929

74304

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXV se compune din D-nii: **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului; **O. Ţino**, Doctor în Matematici, Profesor în Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer Inspector General, Directorul General al Exploatării Monopolurilor, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" (Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 501, 02, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 08, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 38, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 65, 69, 85, 208, 30, 55, 60, 75, 78, 92, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 90, 400, 05, 20, 24, 25, 49, 72, 89, 91, 95, 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 24, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 69, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 38, 45, 49, 62, 64, 73, 76, 80, 84, 90, 93, 97, 99, 800, 01, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" (Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXV *SUPLIMENT* No. 1

RECREAŢIUNI

1. **Patrate simetrice.** Nu există de 2, de 4 şi de 8 cifre. De trei cifre sunt 121, 484, 676; de cinci cifre sunt 10201, 12321, 14641, 40804, 44944, 69696, 94249; de şase cifre e numai 698896; de şapte cifre sunt 1002001, 1234321, 4008004, 6948496. In general, pentru n de o cifră, avem soluţiile:

$$(10n+1)^2, \qquad (2.10n+1)^2, \qquad \frac{n}{(111\ldots11)^2}\,2.$$

I. I.

* * *

2. **Curiosités arithmétiques.** E. N. Barisien a donné ces égalités: (*Mathesis*, 1909, pag. 220).

$$\begin{aligned}
90\times\ \ 11+\ \ 11^2&=1111.\\
890\times\ 111+\ 111^2&=111111.\\
8890\times 1111+1111^2&=11111111.\\
88890\times 11111+11111^2&=111111111.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les suivantes sont assez curieuses:

		Différences
$1\times9+2=11$	$1\times8+1=9$	2
$12\times9+3=111$	$12\times8+2=98$	23
$123\times9+4=1111$	$123\times8+2=987$	234
$1234\times9+5=11111$	$1234\times8+4=9876$	2345
$12345\times9+6=111111$	$12345\times8+5=98765$	23456
$123456\times9+7=1111111$	$123456\times8+6=987654$	234567
$1234567\times9+8=11111111$	$1234567\times8+7=9876543$	2345678
$12345678\times9+9=111111111$	$12345678\times8+8=98765432$	23456789
$123456789\times9+10=1111111111$	$123456789\times8+9=987654321$	234567890

V. Thébault
(Le mans. France).

* * *

3. **Numărul 13.** In *Universul literar* No. 6 din 1928 sub titlul „*Superstiţie*", găsim următoarele:

„Nu sunt superstiţios, a spus un nobil necunoscut, pentrucă aceasta ar aduce nenorocire. Massenet, ilustrul autor al lui „*Werther* şi *Manon*" nu simpatiză deloc numărul 13; se temeă de el. Nu scriă niciodată o scrisoare cu data de 13. In niciunul din numeroasele sale manuscrise,—care sunt păstrate la Biblioteca Operei, — nu se găseşte numărul 13. El înlocuiă numărul 13 cu 12 *bis*. Călătorind, înainte de a se instală în vreun vagon, observă să nu aibă numărul 13 sau adunând cifrele să nu deă 13. Destinul însă nu a respectat superstiţia sa, căci a murit în ziua de 13 August 1912. Suma cifrelor anului este 13!".

H. P. M. Ionescu.

* * *

4. **Numărul literelor unui cuvânt.** Cu privire la recreaţia No. 2 din No. 1 Volumul XXXIV, pentru limba franceză cred că cel mai lung cuvânt este *anticonstitutionnellement*, care se scrie cu 25 litere, deci cu trei mai multe decât cel mai lung dat pentru limba română.

V. Popescu
(Toulouse).

* * *

5. **Triunghiul aproximativ echilateral.** Descriind poziţiunea ocupată de inamic, generalul a rostit:

„După cum vedeţi, satele A, B, C formează un *triunghiu absolut echilateral, cu laturile mai mult sau mai puţin egale*".

Intrebarea este, cât de *relativ echilateral* este un triunghiu cu laturile *absolut egale*?

Gh. B.

* * *

6. **Linii paralele negre!** In romanul *„Adam şi Eva"* de Liviu Rebreanu, găsim:

„... din care i se vedeà numai faţa de ceară, vrâstrată cu *trei linii negre paralele*: sprâncenele, genele şi mustăţile".

I. I. Iliuţă-Dăbuleni

* * *

7. **Linia dreaptă în zicătorile populare.** *Drept* ca Neamţu.—*Drept* ca funia în traistă. — Numai mândruliţa mea, e *dreaptă* ca secerea. — *Drept* ca lumânarea.

I. I.

* * *

8. **O soluţie a problemei 3156.** Se cereà să se dovedească egalitatea:

$$\sum' \frac{a^2(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = \sum' \left[\frac{a(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}\right]^2.$$

Dacă simplificăm ambii membrii cu Σ şi cu $(k-a)(k-b)/(a-b)(a-c)$, rămâne: $a^2 = (a)^2$, ceeace este evident!

C. I. Ciorănescu.

* * *

9. **La un examen particular.** Profesorul (grăbit să nu piarză trenul cu care abià venise): — Cu ce este egal x la a doua minus y la a doua?

— Elevul (scrie) $(x-y)(y+y)$.

— Profesorul: Bine. Treci la loc.

Profesorul (întrebând pe alt elev): Cu cât este egal x la a doua plus y la a doua?

— Elevul (scrie): $(x+y)(x+y)$.

— Profesorul: Bine. La revedere băieţi. Aţi trecut cu toţii. Succes la bacalaureat!

V. C. Popescu.

* * *

10. **Ecuaţia vieţii.** Intr'un roman al lui Dekobra găsim:

«Creerul tău este deprins cu *ecuaţii algebrice*: şi viaţa se prezintă în fiecare cu o ecuaţie nouă... $ax^2 + bx + c = 0$. Simbolul admirabil al sforţărilor omeneşti, care totalizate în spaţiu şi în timp se reduc la neant».

H. P. Ionescu.

* * *

11. **Imaginară reală.** In formula cunoscută:

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

facem $x = -2$ şi găsim:

$$L(-1) = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \dots,$$

şi împărţind cu 2 avem:

$$\tfrac{1}{2} L(-1) = L\sqrt{-1} = Li = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{2^3}{4} + \dots$$

O. M. Schäciter.

* * *

12. **Problema matematică a lui Isben.** In articolul *«Femeile lui Ibsen»* de Th. D. Speranţă, publicat în *«Universul»* din 29 Octombrie 1928, găsim următoarele:

«Ea e atât de sinceră sau naivă, sau mai bine e un *semn algebric* din *problema de matematică a lui* Ibsen. Bărbatul, care nu-i de cât *semn algebric*, îi dă sfaturi şi caută să o convingă că face greşală, dar la urmă *se algebrizează* şi el, şi îi dă consimţământul să plece, să facă ce vreà».

J. N. Vâlceanu.

* * *

13. **O formulă a căsătoriei!** In ziarul *«Naţiunea»* din Cluj, D-l A. Domnide a publicat următoarele:

«Pentru părinţii cu fetele purtate la şcoală, am culeş date din scrieri biologice şi de sociologie, şi am compus următoarea formulă pentru orientare:

$$Pr = abc/r^2,$$

care se explică aşà: probabilitatea de măritiş este drept proporţională cu tinereţea, gingăşia, naivitatea (a) candidatei; apoi drept proporţională cu sănătatea şi frumuseţea corpului (b); şi tot drept proporţională cu calităţile de creştere familiară şi aptitudinile gospodăreşti (c); în fine este invers proporţională cu patratul cercului de cunoştinţe şi cu umbletul pe drumuri, fiind că e legea naturii ca femeia să fie o fiinţă domestică şi talpa casei».

Al. A. Roşu.

* * *

14. **Ce se învaţă la liceele nereale.** La problema 144 din *Revista matematică din Timişoara* un elev a dat următoarea soluţie:

«Ecuaţia propusă o putem scrie succesiv:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1),$$

Dar x şi $-x$ având semne contrare dispar, şi ne rămâne:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} = x = \sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1).$$

Dar $\sqrt{2} = 1{,}41$, $\sqrt{3} = 1{,}73$. Inlocuind şi făcând calculele găsim $x = 3{,}8593$ Sau în numere întregi $x = 4$».

Cine nu credeţi că e bine, nu aveţi decât să verificaţi!

Ion S. Antoniu.

* * *

15. **O contradicţie.** Se dă:

$$y = nx - m\sin x.$$

Se vede imediat că făcând $x = 0$, găsim $y = 0$. Dar această condiţie ne duce la:

$$nx - m\sin x = 0, \quad \text{sau} \quad m/n = x/\sin x.$$

Insă dacă x tinde către 0, partea doua tinde către 1 şi deci $m = n$. Aşà dar două cantităţi neegale m şi n, trebuie neapărat să fie egale!

C. E. GEORGESCU.

* * *

16. **Pacostea infiniţilor.** Toate ar fi cum ar fi la *Analiza* asta, spunea X prietenului său Y, dacă n'ar fi infiniţii ăia aşa de mici.

— *Ia şi tu unul mai mare*, îl încurajează Y cu candoare.

X mai în curent cu teoria infiniţilor mici, replică sentenţios:

— Aşà aş face dacă *infiniţii mici* n'ar rămâne *tot mici, ori cât de mari* i-aşi luà eu!

GH. B.

* * *

17. **Puterea matematicilor.** Ea rezultă din următorul pasagiu al lui LEON BRUNSWIEG: «Lumea este mai întinsă decât cugetarea noastră. Ori de câte ori instrumente noi îndepărtează orizontul observaţiunilor noastre, ele fac să reiasă din adâncimi neaşteptate descoperirile cele mai descurăjătoare pentru obişnuinţele minţii umane. Dar în acelaşi timp, şi după cum observă KANT, lumea este mai mică decât cugetarea noastră. Limitată întru câtva la planul realului, ea nu ar puteà, la rândul ei, să aprecieze fecunditatea infinită a analizei matematice...».

I. I.

* * *

18. **Reprezentarea grafică a sinusului.** Mitică Popescu erà elev în clasa VI reală. Fiind cam tare de cap, tatăl său i-a luat un meditator. Intr'o orà de matematică e scos la trigonometrie, la tablă. Profesorul îi cere să spuie tot ce ştie despre sinus, şi Mitică începe.

— *Despre sinus.* Definiţie. Se numeşte sinus perpendiculara lăsată de pe un arc pe diametrul ce trece prin cealaltă extremitate a arcului.

Se uită la profesor, care dă din cap în semn de aprobare. Mitică prinde curaj şi spune toată lecţia pe nerăsuflate. Se opreşte însă la reprezentarea grafică a variaţiunii.

— »Ei, ce'i». Il întreabă profesorul.

— «Mă rog»... Dar deodată îşi duce degetul arătător la tâmplă. Faţa i se'nsenineazà, ca cerul după o ploaie torenţială de vară; împreună mâinile ca pentru rugăciune şi priveşte în palma desfăcută. Colegii lui se privesc reciproc; Profesorul observă şi el gestul, şi-l întreabă:

— «Ce faci acolo»?

— «Mă rog», îngână Mitică, mi-a spus ieri meditatorul meu că..., că de oiu uità reprezentarea grafică să mă uit aşa în palme că o am acolo. Satisfăcut trasează apoi corect pe tablă reprezentarea cerută, în timp ce în clasă e o ilaritate generală.

I. MURĂROIU.

* * *

19. **Calcule astronomice!** Citim în revista *Ilustraţiunea Română*, Anul I No. 8 cu data: Joi 15 August 1929, la pag. 13 sub titlul:

Ceva despre Lună:

«Luna este în mijlociu de 50 de ori mai mică decât pământul; deci din globul nostru s'ar puteà formà 50 de luni.

Meridianul pământului are o lungime de 40.000 km. rezultă deci că cel al lunei, *n'are decât 800 km.* Diametrul pământului, depăşeşte 12.000 km.; deci cel al lunei *poate fi numai aproape 300 km.*, adică distanţa dela Bucureşti la Tr.-Severin.

Un aeroplan de pildă, care ar zburà cu o iuţeală de 200 km. pe oră, ar puteà face înconjurul lunei în vre-o cinci ore».

ING. I. I. CHIŢULESCU.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

ȘCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXV

15 SEPTEMBRIE 1929 — 15 AUGUST 1930

BUCUREȘTI

—

IMPRIMERIILE STATULUI

1929

LISTA MEMBRILOR
SOCIETAŢII „GAZETA MATEMATICA“

DELEGAŢIUNEA PENTRU ANUL XXXV*)

AL. D. BUNESCU, O. ŢINO ŞI C. MALCOCI (CASSIER)

PERSONALUL REDACŢIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreaţiuni, diverse şi reclamaţiuni privitoare la tipărire.

G. ŢIŢEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice.*

AL. BUNESCU, GH. ILIESCU, C. NICOLAU şi A. SĂLĂGEANU. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

I. IONESCU. Membru delegat pentru aritmetică elementară.

E. ABASON, D. BARBILIAN şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru geometrie elementară.

TR. DORDEA, LT.-COL. G. LITEANU şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru trigonometrie.

M. GHERMĂNESCU, D. V. IONESCU şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru algebră elementară.

G. A. NICHIFOR. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU. Membru delegat pentru mecanica elementară.

COL. GH. BUICLIU, LT.-COL. G. LITEANU şi AL. PANTAZI. Membri delegaţi pentru geometria analitică.

G. A. NICHIFOR şi C. ORĂŞANU. Membri delegaţi pentru cosmografie.

Ş. GHEORGHIU, CL. MITITELU şi AL. PANTAZI. Membri delegaţi pentru geometria triunghiului.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru probleme şi note de matematici superioare.

A. ANGELESCU, TH. ANGHELUŢĂ, şi GH. BRATU. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

E. ABASON şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru clasarea problemelor propuse.

TR. DORDEA. Membru delegat pentru exerciţii.

N. ROD. RACLIŞ. Membru delegat pentru chestiuni de examen.

Ş. GHEORGHIU şi AL. PANTAZI. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

E. ABASON, D. BARBILIAN şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a problemelor redijate.

E. ABASON, D. BARBILIAN, A. BRENER, COL. GH. BUICLIU, G. I. DUMITRESCU, TR. A. DORDEA, Ş. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, R. IANCULESCU, D. V. IONESCU, CĂPITAN I. LINTEŞ, LT.-COL. GH. LITEANU, T. MAREŞ, CR. MATEESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, O. ŢINO şi GR. ZAMFIRESCU. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un casier. (Art. 13 din statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer. Doctor in Matematici. — Inginer in Direcţiunea apelor. Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti — Str. Justinian, 20. Bucureşti 2.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara şi Şcoala Militară de Artilerie. — Str. General Foch, 27. Timişoara.
4	1928, Mai 9	ALEXANDRESCU T. I. Inginer. — Directorul Manufacturii de tutun „Belvedere". — Bucureşti.
5	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
6	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2, Cluj.
7	1928, Aug. 29	ANTONIU S. I. Inginer. — Carrefour de l'Odéon, 13. Paris.
8	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 50. Bucureşti.
9	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. — Inginer la Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4.
10	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires.
11	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul General al Contabilităţii din Ministerul Instrucţiunii. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti.
12	1927, Mai 11	BARBILIAN D. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Asistent Universitar. — Str. Ştefan Mihăileanu, 9. Bucureşti.
13	1912, Aug. 28	BELEŞ I. Inginer-Şef. — Director de Serviciu C. F. R. — Str. Regală, 12. Bucureşti.
14	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE Inginer. — Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române".—Str. Basarabia, 45. Bucureşti.
15	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Berde, 3. Cluj.
16	1926, Iunie 28	BRENER M. A. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a exploatării Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti.
17	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Podurilor C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti.
18	1920, Aug. 15	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Parcul Bonaparte. Str. Wasington, 32. Bucureşti.
19	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. Colonel de Artilerie. — Comandantul Regimentului 38 Obuziere. — Timişoara.

*) Data admiterii.

20	1928, Mai 9	Bujoreanu N. Inginer. — Str. Justinian, 17. Bucureşti.
21	1924, Ian. 30	Bunescu D. Al. Inginer S. N. P. S.—Directorul Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Telefon 300/79. Bucureşti 6.
22	1920, Ian. 10	Buradescu Traian Inginer.—Inspector principal technic C. F. R. Conducătorul Inspecţiei a 7-a Exploatare Cluj.—Str. Berthellot, 10. Cluj.
23	1910, Oct. 25	Buşilă D. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Matei Milo, 2 bis. Telefon 301/45. Bucureşti.
24	1921, Mai 4	Buşilă I. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice.— Str. Esculap, 6 bis. Bucureşti.
25	1914, Iulie 12	Cambureanu V. Inginer.—Director central C. F. R.– Subdirectorul Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti.
26	1926, Iun. 28	Cambureanu V. D. Inginer. — Şef de Serviciu technic în Ministerul Sănătăţii. (Inspectoratul general balneo-climateric). — Str. D. Onciul, 13. Bucureşti 4.
27	1910, Aug. 3	Capriel Digran. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Democraţiei, 37. Galaţi.
28	1922, Noem. 4	Capriel I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă"; al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti.
29	1920, Mart. 1	Caraman E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
30	1928, Aug. 29	Cassian Gh. Maior. — Director de studii la Şcolile pregătitoare şi speciale ale Aeronauticei. — Calea Griviţei, 81. Bucureşti.
31	1920, Ian. 10	Cazacu N. C. Inginer. — Şef de Secţie C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.
32	1914, Dec. 20	Chiricuţă A. Inginer Inspector General. — Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti.
33	1920, Mart. 1	Chiţulescu I. Ioan. Inginer. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Pantelimon, 34. Bucureşti
34	1921, Febr. 5	Cioc M. Inginer. — Sub-director General al Societăţii „Uzinele Metalurgice din Copşa Mică şi Cugir".— Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti.
35	1895, Sep. 15* (fondator)	Constantinescu Tancred. Inginer Inspector General. — Senator. Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti.
36	1910, Apr. 3	Costinescu Dan. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica Letea. Bacău.
37	1928, Ian. 26	Dordea A. Traian. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „C. Alimăniţeanu", Oltenita.—Str. Eliade Rădulescu. Oltenita.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

38	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Şos. Ştefan cel Mare, 170. Bucureşti.
39	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Şeful Secţiei L 3 C. F. R.—Str. N. Bălcescu, 34. Craiova.
40	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. Colonel în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
41	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director technic al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti.
42	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Militară a Artileriei. — Şcoala pregătitoare de Artilerie. Timişoara.
43	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer diplomat al Şcolii Politechnice federale Zurich. — Directorul Energiei din Ministerul Industriei şi Comerţului. Profesor la Şcoala de electricieni din Bucureşti. — B-dul Pache, 43. Bucureşti.
44	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti.
45	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef. Secretarul general al Ministerului de Comunicaţii. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti.
46	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Pallade, 35. Bucureşti.
47	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer.—Directorul Fabricii de Chibrituri. Cluj.
48	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Profesor de Matematici la Liceul din Constanţa. — Str. Tudor Vladimirescu, 14. Constanţa.
49	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor de Analiză Matematică la Şcoala pregătitoare de Ofiţeri de Geniu. Profesor secundar în Bucureşti.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
50	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în ştiinţele Matematice. Statistician. — Str. Nerva Traian, 116, Bucureşti.
51	1913, Aug. 30	GHEORGHIU MIRCEA. Inginer-Şef. — Direcţiunea Generală a Porturilor. — C. I. D. Orşova.
52	1913, Aug. 30	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. Subdirector General la Societatea generală de Gaz şi Electricitate. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Dionisie, 94. Bucureşti.
53	1921, Mai 4	GHIMUŞ A. D. Căpitan. — Comandantul Şcoalei şi Centrului de instrucţie al Geniului. Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoalele Aeronauticei. — Str. Vasile Lupu, 18. Bucureşti.
54	1910, Iunie 2	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti.
55	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer.—Directorul Manufacturei de Tutun.—Iaşi.
56	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris.— Inginer la Soc. „Edilitatea". — Str. Brezoianu, 44. Bucureşti.

57	1924, Ian. 30	Iancu Lescu R. Licențiat în Matematici. Inginer (diplomat al Școlii Politechnice din Zürich). — Inspector technic în Direcțiunea Exploatării C. F. R. Serviciul Mișcării.—Str. Arion, 8. București.
58	1922, Mai 10	Iliescu Gh. Inginer. — Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret.— Fabrica de Chibrituri-Filaret. București 6.
59	1928, Aug. 29	Iliescu Traian. Locot.-Colonel de artilerie. — Direcția XI Technică Superioară. — Str. Uranus, 98. București.
60	1895, Sept. 15 (fondator)	Ioachimescu Gh. Andrei. Inginer-Șef. Licențiat în Matematici.— Profesor la Școala Politechnică din București. — Str. Buzești, 76. București.
61	1926, Iunie 28	Ioachimescu A. Gh. Inginer. — Subdirectorul Monitorului Oficial și al Imprimeriilor Statului. — Str. Buzești, 76. București.
62	1920, Ian. 10	Ioanovici Aurel. Inginer.—Antreprenor.—Str. General Berthelot, 55. București.
63	1922, Noem. 1	Ionescu V. D. Doctor în Matematici. Fost elev al Școalei Normale Superioare din Paris. — Conferențiar la Facultatea de Științe din Cluj. — Str. Dorobanților, 7 Cluj.
64	1895, Sept. 15 (fondator)	Ionescu I. Inginer Inspector General. — Profesor la Școala Politechnică din București. Membru în Consiliul superior al avuțiilor și întreprinderilor publice; în Consiliul permanent al Ministerului Instrucțiunii pentru partea industrială. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23. București.
65	1912, Iunie 2	Jijie Adam. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licențiat în Științe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric și al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
66	1924, Ian. 30	Kaufmann N. Inginer. — Șef de Secție. Direcțiunea Economatului C. F. R. — Str. Maltopol, 9. București.
67	1919, Sept. 12	Lintes I. Căpitan. Inginer diplomat al Școalei Superioare de Aeronautică din Franța. Profesor la Școalele Militare și Speciale de Aeronautică. — Str. Epicol, 49. București.
68	1921, Mai 4	Liteanu I. Gh. Lt.-Colonel. — Marele Stat Major al Armatei. Profesor la Școalele Militare ale Aeronauticei. — Aleea Sevastopol, 27. București.
69	1913, Aug. 30	Malcoci C. Inginer Inspector General. — Directorul General al Exploatării Monopolurilor. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. București 6.
70	1926, Iunie 28	Manoilescu Mihail. Inginer. — Aleea Alexandru, 22 (Parcul Filipescu). București.
71	1921, Febr. 5	Mareș T. Inginer-Șef. — Șeful Serviciului de Poduri și Șosele al Jud. Vâlcea.—Bul. Tudor Vladimirescu, 21. Râmnicu-Vâlcea.
72	1922, Mai 10	Mateescu Cr. Inginer.— Asistent la Șc. Politecnică. Subdirector al Soc. „Electrica“ București. — Str. General Anghelescu, 179. București.
73	1927, Mai 11	Mereuță V. Inginer. — Inspector principal C. F. R. — Gara Filaret. București.

74	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Militar „N. Filipescu" dela Mânăstirea Dealului. — Târgovişte.
75	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer-Şef. — Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti.
76	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Buştenari. Jud. Prahova.
77	1909, Iunie 1	MIREA N. Şt. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Superioară de Arhitectură. — Str. Inundaţiei, 8. Bucureşti.
78	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer. Subdirector al Exploatării în Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Str. Nicolae Bălcescu, 41. Bucureşti.
79	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Subdirectorul Manufacturii de tutun „Belvedere". — Bucureşti.
80	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Bulevardul Elisabeta, 60. Bucureşti.
81	1909, Noem. 1	NĂSTURAŞ D. Inginer. — Antreprenor de Lucrări technice. — Str. Temişana, 34. Bucureşti.
82	1922, Martie 1	NEGRETZU I. Inginer de mine.—Exploatări agricole (agricultor).— Str. Şerban-Vodă, 170. Piteşti.
83	1928, Aug. 29	NEGURĂ St. Licenţiat în Matematici. — Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Carol. Bârlad.
84	1910, Mai 20	NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice.— Docent Universitar. Profesor. Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti.
85	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONST. Inginer la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
86	1922, Noem. 4	NICOLAU TH. M. Inginer. — Direcţiunea de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii. Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Lăzureanu, 31 B. Bucureşti.
87	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Director General al Societăţii Anonime industriale „Arad-Brad". — B-dul Carol, 57. Arad.
88	1923, Iulie 4	NICULESCU GH. Căpitan de aviaţie. Inginer aeronautic, diplomat al Şc. superioare din Paris; absolvent al Şc. Politechnice din Timişoara.—Membre de la comission de réception du matériel aéronautique. — Légation de Roumanie, rue Brémontier, 17. Paris XVII.
89	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Doctor în ştiinţele matematice.—Conferenţiar titular la catedra de calcul diferenţial şi integral. — Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cernăuţi.
90	1922, Martie 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Clopotarii-Vechi, 25. Bucureşti.
91	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. Colonel. — Fundătura Oraţiu, 6 bis. Bucureşti.
92	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer electromecanic dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Inginer mecanic la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Grădina-Veche, 34. Galaţi.

93	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Licenţiat in Matematici. Inginer-hotarnic şi Operator Topometru. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Profesor la Şcoalele Aeronautice. Antreprenor de Lucrări. — Strada Ştirbei Vodă, 45. Bucureşti.
94	1910, Mai 20	ORĂŞANU GR. Licenţiat in Matematici. — Inspector şcolar. Profesor la Liceul din Ploeşti. — Str. Stănică Marin, 32. Ploeşti.
95	1927, Oct. 17	OTTULESCU EUG. Inginer.—Str. Alexandrina, 10. Bucureşti.
96	1914, Dec. 20	PANAITESCU Sc. General de Divizie in retragere. Conferenţiar Universitar. — Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chişinău. — Str. Alexandru cel Bun, 79. Chişinău.
97	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor in Matematici. — Actuar la Casa Centrală a Asigurărilor Sociale.— Str. Nisipari, 21. Tel. 219/37. Bucureşti 3.
98	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Inginer Expert Societatea Naţională de Credit Industrial. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— B-dul Domniţei, 8. Bucureşti 1.
99	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat in Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi.—Str. Rosetti, 8. Iaşi.
100	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Directorul General al Societăţii Anonime Române de Navigaţiune pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu Vodă, 25. Bucureşti.
101	1911, Aug. 11	POPESCU GH. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. General Praporgescu, 27. Bucureşti.
102	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer. —Inginer la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12. Bucureşti 2.
103	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat in Matematici. Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Liceul Sf. Sava. — Parcul Delavrancea, Aleea D, 2. Bucureşti 2.
104	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Licenţiat in Matematici. — Elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Rue d'Ulm, 45. Paris V.
105	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — Bul Domniţei, 15. Bucureşti 1.
106	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel din Artilerie. — Str. Basarabiei, 11. Bucureşti.
107	1927, Mai 11	RACLIŞ ROD. NECULAI Profesor suplinitor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Redactorul „Revistei Universitare de Matematică". — Str. Porumbaru, 70. Bucureşti 2.
108	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer Inspector General. — Director în Direcţia de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Semilunii, 5. Bucureşti.

109	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer. — Şef de Secţie în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti.
110	1895, Sept. 15 (fondator)	ROCO M. Inginer Inspector General. — Str. Paris, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti.
111	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Str. Fracmazonă, 114. Bucureşti.
112	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. INGINER. — Inginer la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului.—Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
113	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti.—Str. G. Gr. Cantacuzino, 50. Bucureşti.
114	1920. Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii Clădirea Românească. — Str. Pia Brătianu, 5. Bucureşti 3.
115	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Atelierele C. F. R. Griviţa.—Str. Pasteur, 14. Bucureşti.
116	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer.—Antreprenor de construcţii. — Calea Moşilor, 134. Bucureşti 1.
117	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în Matematici.—Societatea „Steaua Română". — Com. Moineşti, Jud. Bacău.
118	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor Universitar. — Str. Berde, 3. Cluj.
119	1921, Febr. 5	SFINŢESCU C. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Profesor la Şcoala Superioară de Arhitectură şi la Şcoala Superioară de Ştiinţe de Stat. Director General al Casei Lucrărilor Municipiului Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti.
120	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer-Şef. — Director P. şi S. Direcţiunea II-a de Poduri şi Şosele. — Str. Sf. Ştefan, 35. Bucureşti.
121	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47, Bucureşti.
122	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Asistent la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Inginer la Soc. „Edilitatea".—Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
123	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. Colonel. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti.
124	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică. — Str. Salvator, 37. Bucureşti.
125	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi. — Str. Elena Domna, 39. Iaşi.
126	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.—Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti.
127	1929, Aug. 28	TEODORU D. RADU. Inginer-Şef. — Director la Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Manufactura de tutun Belvedere, Villa Nr. 1, Ap. B. Bucureşti.
128	1910, Mai 20	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33. Bucureşti.

129	1921, Aug. 31	Ţino O. Doctor în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic din Bucureşti. — Str. Ismail, 16. Bucureşti.
130	1895, Noem. 1	Ţiţeica Gh. Doctor în Ştiinţe Matematice. — Secretar general al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona.— Str. Dionisie, 80. Bucureşti, 3.
131	1919, Sept. 12	Ulescu Al. Inginer. — Director la Fabrica I.A.R. Braşov. — Str. General Dona, 11. Bucureşti.
132	1914, Dec. 10	Vardala I. Inginer Inspector General.—Director General al Regiei autonome a Porturilor.—Str. Dimineţei, 4. Bucureşti 4.
133	1927, Mai 11	Vasilache I. Inginer.—Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti.
134	1927, Mai 11	Vasilescu Fl. Doctor în Matematici.—Str. Eroului, 19. Bucureşti
135	1923, Mart. 26	Vasilescu Gr. Inginer. — Str. Cometa, 37. Bucureşti.
136	1920, Ian. 10	Vasilescu C. I. Inginer-Şef—Str. Gr. Alexandrescu, 21. Bucureşti 3.
137	1925, Aug. 26	Vasiliu M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti.
138	1924, Ian. 30	Zamfirescu Gr. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1921 şi E. S. A. Paris 1922. — Coasociat şi Director al Societăţii pentru Exploatări Tehnice.—Parcul Ferdinand Str. F. Vila Oprişan. Bucureşti.
139	1920, Sept. 28	Zapan Gh. Avocat. Profesor şi Director de Studii al Institutului Naţional de Educaţie Fizică din Bucureşti.—Wilmersdorferstr, 68. Berlin-Charlottenburg.
140	1921, Mai 4	Zapan Gr. Căpitan-aviator. Inginer hotarnic. — Profesor de Matematici. Student la Şcoala Superioară de aeronautică şi construcţii mecanice din Paris.— Rue Vaugirard, 227. Paris XV.
141	1925, Aug. 26	Zlatcu St. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politecnică din Zurich. — Antrepreror—Str. Pasteur, 8. Tel. 336/54. Bucureşti. 6.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

	Data admiterii	Data morţii
1. Alexandrini O.	1895 Nov. 15	1905 Sept. 6.
2. Balaban V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22.
3. Cristescu V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10.
4. Davidescu Em.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28.
5. Erbiceanu C.	1898 Sept. 15	1904 Apr. 3.
6. Evolceanu V.	1927 Ian. 28	1928 Oct. 19.
7. Lalescu Tr.	1905 Mart. 1	1929 Iunie 15.
8. Moţoi I.	1906 Apr. 1	1929 Ianuarie 16.
9. Nicolaevici G.	1909 Iunie 1	1917.
10. Nicolescu N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5.
11. Roşu Al.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17.
12. Saligny A.	1914 Dec. 9	1925 Iunie 17.
13. Teodor D. I.	1906 Apr. 1	1924 Iulie 30.
14. Teodorescu I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22.
15. Zottu I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8.

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la „*Gazeta Matematică*", până la sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

CURSUL ANULUI 1929 — 1930

(1 Septemvrie 1929—31 August 1930)

In conformitate cu dispoziţiunile art. 11 din regulamentul general al fondurilor «Gazetei Matematice», subsemnaţii membri ai Comisiunii pentru controlarea gestiunii acestor fonduri şi pentru privegherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală care a avut loc în ziua de 29 August 1928, aducem la cunoştinţă următoarele:

1. Din venitul anual al fondului SPIRU C HARET, conform regulamentului pentru administrarea lui, publicat în «Gazeta Matematică» Vol. XXVI pag. 108, urmează să se cumpere cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, varietăţi şi curiozităţi matematice, aparate şi modele matematice, etc.), care să se doneze bibliotecilor şcolare dela şcoli secundare sau corespondenţilor merituoşi, elevi ai acestor şcoli. Cărţile se vor distribui între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 28 August 1929, cărţile de felul celor enumerate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze liceului din Silistra.

2. Din venitul fondului LT.-COL. G. TĂNĂSESCU, al cărui regulament a fost publicat în «Gazeta Matematică» Vol. XXVIII, pag. 19, urmează să se deà cărţi de matematică primului clasificat la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

3. Premiul bienal, Inginer H. CAPRIEL, în valoare de 500 lei, pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate, se acordă lucrărilor ce se vor prezentà societăţii de către: studenţii Universităţilor, elevii Şcoalei de Poduri şi Sosele sau de către elevii Şcoalelor de Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XVII, pag. 361.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1930 a fost anunţat în «Gazeta Matematică» anul XXXIV, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările trebuesc trimise societății cel mai târziu până la 1 Mai 1930, iar rezultatul se va publică în numărul din Septemvrie 1930 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil și în cazul când nu se va găsi nici o lucrare meritorie, se va ține un nou concurs.

4. Premiul VASILE CONTA, în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile «Gazetei Matematice», se acordă exclusiv pentru lucrări de filosofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIX pag. 14.

Autorul trebue să fie român și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Lucrările trebuesc prezentate până la 1 Iulie ale fiecărui an, și în cazul când până la această dată nu s'a primit nici o lucrare, se va aștepta data de 1 Iulie anul următor și așa mai departe.

Comisiunea care va examină lucrările prezentate după 1, 2, 3, etc. ani, va propune pentru premiere una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an până la acea dată, sumă care, dacă intervalul e mai mare de 1 an, se va puteà divide între lucrările alese. Comisiunea însă va puteà să nu recomande nici una din lucrările prezentate.

Raportul Comisiunii însărcinată cu cercetarea lucrărilor se va supune desbaterilor adunării generale extraordinare în cursul lunei Octomvrie, iar rezultatul se va publică în numărul din Noemvrie al «Gazetei Matematice».

5. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare, în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicațiune de matematică aplicată la științele militare apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIII, pag. 9.

Autorul publicațiunii trebue să fie român sau să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Premiul este indivizibil și se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găsește nici o lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voește a primì suma de 200 lei, ea se va dà uneia din revistele în care se publică și chestiuni de știință matematică aplicate la științele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicațiunilor militare, apărute prin reviste sau cărți speciale, pânăla 1 Septemvrie anul trecut, precum și manuscrisele ce s'ar aduce la cunoștința societății pânăla acea dată, va întocmi un raport ce se va supune desbaterilor Adunării Generale extraordinare în cursul lunii Ianuarie.

Premiul se va anunță în numărul ce apare în luna Martie și se va acordà lucrării premiate după apariția numărului.

6. Din fondul ANGHEL SĂLIGNY, destinat tipăririi bibliotecii tehnice a «Gazetei Matematice», nu se va tipări nimic, suma fiind angajată în publicațiunile ce au apărut din acest fond.

7. Din fondurile bibliotecei «Gazetei Matematice», se va scoate *„Culegere de probleme de geometrie"* de GH. ȚIȚEICA.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:
E. ABASON.
I. BUȘILĂ.

ARITMETICA LUI NICULAE MILESCU SPATARUL [1]).

Aritmetica lui NICULAE MILESCU SPĂTARUL a fost scrisă în slavonește la Moscova în anul 1672. Titlul său era *„Aritmologion"*, sau știința numerelor, care era însă o adevărată enciclopedie matematică, religioasă și filosofică [2]).

Spre a ne dà seama de împrejurările în cari a fost scrisă această lucrare, trebuie să spunem pe scurt cine era NICULAE SPĂTARUL.

NICOLAE SPĂTARUL era din satul Milești, din ținutul Vasluiului, dintr'o veche familie boierească. S'a născut pe la 1625. Studiile și le-a făcut la Constantinopol, unde a avut de profesor pe GAVRIL VLASTO, mai târziu Mitropolit în Lepant, dela care a că-

1) Acest articol formează răspuns la cererea No. 11 din *Gazeta Matematică*, Anul XXI, pag. 144. El s'a găsit printre hârtiile rămase dela autor, care nu l'a publicat pe când era în viață, căci dorea să-l completeze cu ceeace a apărut în scrierile mai noi, relative la SPĂTARUL NICOLAE MILESCU, unul din marii savanți români din secolul XVII. Cultura lui științifică ar merità în adevăr să fie cercetată și studiată mai de aproape.

I. I.

2) A se vedea X (anonim) în *„Convorbiri literare"*, Anul XVII 1883 1884, pag. 479.

pătat o vastă cultură. El știa elinește, latinește, grecește și turcește, iar mai târziu italienește și chinezește. Probabil că a cunoscut și limbile franceză și suedeză, fiind în legătură cu ambasadorii francezi și suedezi dela Moscova.

El a ocupat în Moldova diverse demnități, iar sub ȘTEFĂNIȚĂ LUPU a fost în mare favoare la Curtea moldovenească; însă, conspirând pentru răsturnararea Domnului, ca pedeapsă acesta i-a tăiat nasul, pentru care a și fost poreclit „*Cârnul*".

După aceasta a fugit mai întâiu în Muntenia la GRIGORE GHICA, care l'a numit capuchehaia la Poartă. Din Muntenia s'a dus în Prusia (la Berlin), de unde se reîntoarce peste scurtă vreme în Moldova sub Domnia lui ALEXANDRU ILIAȘI, și aceasta pentru ultima dată. Pleacă în Suedia și de acolo în Rusia la Moscova. Aci fu protejat de ARTAMON MATVEIEV, primul Ministru al Țarului ALEXIS MILENILOVICI, tatăl lui PETRU-CEL-MARE. MILESCU, prin spiritul și cultura lui, uluise pe toți muscalii; toată Moscova îl numeà „*Moldoveanul cel filosof*".

MATVEIEV îl face pe MILESCU profesorul și educatorul fiului său ANDREI, în vârstă de 7 ani. Acest ANDREI ajunse pe urmă, sub PETRU-CEL-MARE, senator, comite, ministru de justiție, ambasador rusesc în Franța, Anglia și la Viena [1]).

Țarul ALEXIS MIHAILOVICI, care cunoșteà pe SPĂTARUL MILESCU în casa lui MATVEIEV, îl făcù pe MILESCU dragoman împărătesc și învățător al fiului său PETRU, iar în urmă l-a trimis ca ambasador la împăratul Chinei.

Pentru a îndeplini educația fiului lui MATVEIEV, NICOLAE SPĂTARUL compune și traduce un mare număr de lucrări didactice, istorice și teologice. Redactează între altele și un dicționar grec-latin-rusesc și o aritmetică care erà însă o adevărată enciclopedie matematică, religioasă și filosofică" [2]).

Iată ce spune B. P. HAȘDEU despre această aritmetică sau „*Aritmologion*":

„Din Stockholm MILESCU apare deodată în Moscova.

„In anul 1672 el scrie acolo, slavonește, un mic manual de aritmetică pe care noi îl cunoaștem de abiă din nume: „*Aritmologion*" sau știința cifrelor, prelucrat din limba greacă. Ni se pare

1) A se vedeà B. P. HAȘDEU, „TRAIANU" No. 16 din 14 Fevruarie 1870.
2) Anonim. Loc citat.

că fântâna lui MILESCU a fost anume tractatul bizantin al lui PSELLUS *cel tânăr* din secolul XI, a cărui aritmetică s'a publicat grecește la Paris încă de pe la 1538. (SCHOEL, *Histoire de la littérature grecque*, Paris 1825, tomul VII, pag. 152 [1])".

Iată ce scrie și marele filo-româm EMIL PICOT despre această aritmetică:

„Il redigea ensuite une Arithmétique qu'il termina au mois de Septembre de l'année 1672. Sous un titre qui indiquait un simple manuel de l'art du calcul, il avait, en s'inspirant des petits traités en usage dans les écoles greques, rédigé une sorte d'encyclopédie mathématique, religieuse et philosophique. Les citations de l'Evangile, des Saints-Pères et des auteurs profanes de l'antiquité servaient d'aide-mémoire aux etudiants. La dernière partie, consacrée à l'éthique, était composée d'exemples empruntés aux vertus impériales.

„M. KEDROV, auteur d'une notice sur *l'Arithmétique* a cru pouvoir la comparer au *San-dze-king* des Chinois, livret qui contient en 168 vers un résumé de toutes les connaisances humaines. Ou trouve de plus dans l'ouvrage de Spatar des groupements de chiffres qui attestent le goût de l'auteur pour la science cabalistique" [2]).

Iată tot după EMILE PICOT, titlul acestui *„Aritmologion"* redat în franțuzește după însemnarea din slavonește a lui KEDROV:

„Arithmétique, ou Livre de la Science des nombres, dans lequel sont consignées, à l'aide des chiffres des choses merveilleuses et très utiles pour la conduite; ouvrage propre à la lecture et à l'enseignement pour ceux qui s'adonnent à la philosophie, divisé en trois parties: dans la première sont enseignées l'Ecriture sacrée et la Sainte science ecclésiastique; dans la seconde les philosophes se livrent à l'étude de la philosophie; dans la troisème est contenue la science de l'éthique [3]). (Ce nouveau livre, intitulé *„Arithmétique"* a été terminé et calculé par le sage homme NICOLAS SPATAR en l'an 7181=1672, le 26 jour de Septembre...)".

(Bibliothèque de M. le professeur N. KEDROV ms, in-fol de 148 ff. Bibliothèque du Monastère de Cudov, ms. No. 159 [4]).

---

1) B. P. HAȘDEU, „TRAIANU" No. 16. Fevruarie 14, anul 1870.

2) EMIL PICOT. „NICOLAS SPATAR MILESCU". Ernest Leroux, éditeur, Paris, 1883. Pag. 17.

3) Episcopul FILARET indică însă *Etica* ca pe o lucrare deosebită de *Aritmetică*. (PICOT loc. citat.).

4) EMILE PICOT. Loc citat.

Din cele ce preced rezultă că aritmetica lui NICOLAE SPĂTARUL din Mileşti erà scrisă în limba slavonă, şi că nu o cunoaştem decât din nume. Ea erà o enciclopedie matematică, religioasă şi filosofică.

Cât priveşte grupările de cifre, care după KEDROV, mărturisesc gustul autorului pentru ştiinţa cabalistică, e probabil că aceste cifre se raportau la patrate magice, căci cuvântul cabalistic însăşi arată ceeace se raportă la magie, iar magii se ştie că ereau preoţii religiei lui ZOROASTRU, care cultivau astronomia, astrologia şi alte ştiinţe oculte.

Cum că aritmetica lui MILESCU nu conţineà descrierea artei acelor practici bizare, contra legilor naturale, numite de popor magie, şi pentru care în Evul mediu ereau arşi de vii toţi acei care o practicau, o deduc din aceia că MILESCU a scris cartea lui pentru educarea fiului unui prim ministru rus din veacul al XVII, scriere care i-a servit apoi şi la educarea lui PETRU CEL MARE, fiul ţarului ALEXIS, şi nu puteà conţine decât lucruri ştiinţifice, religioase şi filosofice depe acele vremuri.

Ruşii erau foarte atenţi şi circomspecţi la tot ceeace se scrià despre religie, astfel că MILESCU, care căutà ajutor şi sprijin la Moscova, n'ar fi putut scrie contra religiei, căci pentru asemenea abateri se pedepseà cu moartea.

Aceasta este tot ce se ştie despre Aritmetica lui MILESCU, iar IONESCU-GION a luat desigur cunoştinţă despre MILESCU din ceeace a scris asupra lui, HAŞDEU şi EMILE PICOT.

Scrierea lui PICOT este cea mai complectă, căci fiind scrisă la 1883 el a cunoscut şi ceeace a scris HAŞDEU în „*Traianu*". Despre NICULAE MILESCU SPĂTARUL. Se mai poate consultà:

GH. MISAIL „*Oamenii mari ai Românilor*" în „*Traianu*", Bucureşti, 1869, No. 33 din 13 Iunie.

B. P. HAŞDEU „*Viaţa, faptele şi ideile lui* NECULAE SPĂTARUL DIN MILEŞTI" în „*Traianu*" 1870, No. 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16.

B. P. HAŞDEU „*Arhiva istorică*" Vol. I. pag. 137.

B. P. HAŞDEU „*Columna*" 15 Septemvrie 1872.

Anonim „*Foiletonul Satirului*". Bucureşti, 1866, No. 12, 13 şi 14.

B. LĂZĂREANU „SPĂTARUL NICULAE MILESCU CÂRNUL". In „*Adevărul*" No. 13001, Anul 39. Mai 1926.

† V. CRISTESCU.

NOTE MATEMATICE

1. *Nombres premiers qui, retournés donnent des nombres premiers.*

Voici la liste des nombres premiers absolus, compris entre 1000 et 10000 qui, retournés, donnent des nombres premiers.

1009	et	9001	1021	et	1201	1031	et	1301
1033	et	3301	1061	et	1601	1069	et	9601
1091	et	1901	1097	et	7901	1103	et	3011
1109	et	9011	1151	et	1511	1153	et	3511
1181	et	1811	1193	et	3911	1213	et	3121
1217	et	7121	1223	et	3221	1229	et	9221
1231	et	1321	1237	et	7321	1249	et	9421
1259	et	9521	1279	et	9721	1283	et	3821
1381	et	1831	1399	et	9931	1409	et	9041
1429	et	9241	1439	et	9341	1453	et	3541
1471	et	1741	1487	et	7841	1499	et	9941
1523	et	3251	1559	et	9551	1583	et	3851
1597	et	7951	1619	et	9161	1657	et	7561
1669	et	9661	1723	et	3271	1733	et	3371
1753	et	3571	1789	et	9871	1847	et	7481
1867	et	7681	1879	et	9781	1913	et	3191
1933	et	3391	1949	et	9491	1979	et	9791
3019	et	9103	3023	et	3203	3049	et	9403
3067	et	7603	3083	et	3803	3089	et	9803
3109	et	9013	3163	et	3613	3169	et	9613
3257	et	7523	3299	et	9923	3319	et	9133
3343	et	3433	3347	et	7433	3359	et	9533
3373	et	3733	3389	et	9833	3407	et	7043
3449	et	9443	3463	et	3643	3469	et	9643
3527	et	7253	3583	et	3853	3697	et	7963
3719	et	9173	3767	et	7673	3889	et	9883
3917	et	7193	3929	et	9293	7027	et	7207
7057	et	7507	7177	et	7717	7181	et	1817
7219	et	9127	7229	et	9227	7297	et	7927
7349	et	9437	7457	et	7547	7459	et	9547
7529	et	9257	7577	et	7757	7589	et	9857
7643	et	3467	7649	et	9467	7687	et	7867
7699	et	9967	7879	et	9787	7949	et	9497
9029	et	9209	9349	et	9439	9479	et	9749
9679	et	9769						

V. THÉBAULT.

*2. *Asupra problemei 3754.* Analog cu problema No. 3754 propusă de D-l I. Ionescu, îmi propun următoarea problemă:

In cari triunghiuri două mediane sunt invers proporţionale cu laturile opuse?

Fie m_a şi m_b două mediane. Se ştie că:

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\ , \quad m_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}.$$

După enunţ trebuie să avem:

$$am_a = bm_b\ ,$$

adică:

$$a^2[2(b^2+c^2)-a^2] = b^2[2(c^2+a^2)-b^2],$$

$$2a^2b^2+2a^2c^2-a^4 = 2b^2c^2+2a^2b^2-b^4,$$

$$2c^2(a^2-b^2) = a^4-b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2),$$

de unde deducem:

$$a^2-b^2 = 0, \qquad 2c^2 = a^2+b^2.$$

Prima ne conduce la $a = b$, adică la *triunghiurile isoscele;* a doua ne conduce la *triunghiurile auto-mediane.*

P. I. Ghiţoiu.

3. *Cursuri vechi de matematici la Iaşi.* Cărţile după cari se predau matematicile în şcoalele din Iaşi dela 1838 sunt următoarele:

Elemente de aritmetică, până la proporţii, cu aplicaţii practice. Manuscris de Aga Gh. Asachi. (Pentru începători).

Aritmetica tipărită după învoirea cinstitei Epitropii, la anul 1836 de Aga Gh. Asachi (pentru clasele colegiale de gradul II).

Elemente algebrice, tipărite cu învoirea cinstitei Epitropii, de Aga Gh. Asachi (pentru clasele colegiale de gradul II).

Elemente geometrice, tipărite cu învoirea cinstitei Epitropii de Aga Gh. Asachi (pentru clasele colegiale de gradul II).

Inalta Matematică. Manuscripte după autorii: Chiara, Salamon, Bihmiler, Baumgartner, Pope şi D-l Th. Stamate, (la învăţăturile înalte).

Geometria practică. Alcătuite manuscripte de autori clasici. (La învăţăturile înalte).

Architectura. Alcătuite manuscripte de autori clasici: NETO, STAMPRER, GHERSTNER, HRISTIAN, RONDELT, RENMAND (la învățăturile înalte).

Mecanica. Alcătuite după autorul MAIZNER de profesorii A. COSTIDESCU și C. ZEFIRESCU (la învățăturile înalte).

I. I.

4. *Cuvântul patrat.* Cuvântul *patrat* nu e cunoscut de mult și de mulți în limba română. Astfel el nu se găsește în *Dicționarul Limbei Române* de A. T. LAURIAN și J. C. MAXIM, București 1873 și 1876. Găsim numai:

Patrariu. s. m. = quatrans = a patra parte din ceva = un patrariu de oră.

Cartu = quartus (populariu la Macedo-români, ca substantiv). *Cuadru* sau *cfadru* nu se găsește.

† V. CRISTESCU.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Anul XLIII. No. 56, Mai-Iunie 1929 Gembloux. Belgia. Asupra unei curbe hiperarmonică a altor două, de R. DEAUX. Asupra numărului $(10^{23} - 1)/9$, de M. KRAITCHIK. Asupra teoremei lui DESARGUES-STURM, de AD. M. Asupra unui criteriu elementar pentru probabilitatea continuă, de C. LURGUIN. Curiositate aritmetică. Abaca calendarului gregorian perpetuu, de R. GOORMAGHTIGH.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CVII. Fascicula 6. Iunie 1929. Buenos-Aires. O nouă metodă independentă, pentru a determina dimensiunea și distanța soarelui, de J. URBACH. Asupra unui sistem de ecuații simultanee, de P. BARBARIN. Omagiu lui BOUSSINESQ, de C. C. DASSEN. Potențialele de exercitare ale atomului de mercur, de RAMON G. LOYARTE.

Idem. Tomul CVIII. Fascicula 1. Iulie 1929.

Boletin Matematico. Anul II. No. 6. Iunie 1929. Buenos-Aires. Descompunere în funcții simple, de B. I. BAIDAFF.

FR. SCACHERL. *La réfraction de l'hélium et de l'argon et sa dépendance des pressions inférieures à une atmosphère.* Brno 1928. (Din publicațiile Facultății de științe ale Universității MASSARYK din Praga).

Miroslav Konecny. *Contribution à l'étude des propriétés projectives du contact.* Brno 1928. (Din publicaţiile Facultăţii de ştiinţe ale Universităţii Massaryk din Praga).

Fr. Scagherl. *La réfraction de l'oxide de carbone, de l'azote et de l'oxide azoteux et sa dépendance des pressions inférieures à une atmosphère* Brno, 1928. (Din publicaţiile Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Massaryk din Praga).

G. Bouligand. *Compléments et exercices sur la mécanique des solides.* Librairie Vuibert. Boulevard St. Germain, 63. Paris. 1929. Preţul 18 franci.

Această broşură de 132 pagini complectează *Précis de Mécanique Rationnelle* scoasă mai înainte de autor. Chestiunile tratate sunt următoarele:

Cap. I. Mişcarea planului pe plan. Cap. II. Exerciţii asupra mişcării unui solid. Urmează o introducere în dinamică şi apoi Cap. I. Frecarea. Cap. II. Ciocnire cu frecare de lunecare. Urmează o notă asupra legăturilor unilaterale. In fine broşura se termină cu probleme complimentare.

Autorul dă o mare atenţiune problemelor frecării şi bine face, căci azi, cu desvoltarea maşinismului, mişcările *„fără frecare"* nu mai dau idei exacte de natura fenomenelor fizice şi tecnice.

Broşura este de folos celor ce studiază mecanica în vederea aplicaţiunilor ei practice.

I. I.

E. Lainé. *Premiers leçons de géométrie analytique et de géométrie vectorielle.* Libraire Vuibert. Boulevard St. Germain 63. Paris 1929. Preţul 4 franci.

In o broşură de 48 pagini autorul dă noţiunile elementare de geometrie analitică şi de vectori, necesare elevilor claselor de matematici speciale şi candidaţilor la marile şcoli, expuse sumar şi clar.

In Cap. I se studiază scalarii, vectorii şi coordonatele. In Cap. II se dau elemente de calcul vectorial, inclusiv derivarea. In Cap. III se tratează despre suprafeţe, linii, plan şi dreaptă în geometria analitică. In Cap. IV avem vectori alunecători, momente, rezultate, cuple. Broşura se termină cu o colecţie de 23 exerciţii.

Recomandăm această broşură liceenilor cari vor să se pregătească pentru studii matematice superioare.

I. I.

Dragutin Ciupe. *Probleme rezolvate din Aritmetică şi Algebră.* Publicare îngrijită de Aetiu Ciupe. Bistriţa. Tipografia G. Zikeli. Bistriţa 1929. Preţul 20 lei.

Intr'o broşură mică de 48 pagini, autorul se ocupă mai întâiu de rezolvarea regulilor de trei simple şi compuse şi dă o nouă procedare de rezolvare numind-o *»Dă-o peste cap»*. Se aranjează numerele date şi necunos-

cuta ca de obiceiu cu necunoscuta pe linia II şi se scrie deasupra fiecărei perechi de numere referitoare la aceleaşi mărimi, literile *d* sau *i*, după cum acele mărimi variază *direct* sau *invers* proporţional cu mărimea în care intră necunoscuta. Numerele ce au pe *d* deasupra se intervertesc. Se înmulţesc toate numerele scrise pe linia I şi se divide produsul obţinut prin produsul numerelor date *d* în linia II. Câtul este necunoscuta. Se dau exemple numerice cari se rezolvă prin această metodă, prin reducerea la unitate, prin proporţii şi prin metoda generală. Chestiunea ocupă 25 pagini.

Se dă apoi o regulă de a se ţine minte produsele prin 9.

Urmează apoi *Teorema geometrică «Ciupe»* prin care se arată că aria unui patrulater depinde numai de mărimea diagonalelor şi de unghiul acestora. Chestiunea e de mult cunoscută. Ea se află reprodusă şi în *Culegerea de Probleme de Trigonometrie*, XXI, 11 apărută în 1901.

După aceasta sunt date 31 probleme variate de aritmetică şi algebră. Problemele sunt în genere bine tratate, însă redactarea lor trebuia mai îngrijită. Aşa la problema 4 avem a face cu o *expresiune* iar nu cu o *formulă*. Triunghiurile din problemele 5 şi 6 se văd a priori că sunt inexistente. La problema 7 s'a notat cu V şi suprafaţă, şi volum, şi valoare. Soluţia problemei 11 nu e practică, căci ea presupune că bucăţile de săpun se pot tăia pentru ca să umple complet cutia, ale cărei dimensiuni nu corespund, în numere întregi, cu dimensiunile bucăţilor de săpun inclusiv ambalajul acestora. După legile noastre, zecimalele se despart prin virgulă, iar nu prin puncte puse sus sau jos. Densitatea de 0,25 dată pentru lemnul de brad e prea mică. Problema 24 se puteà deslegà mai uşor, fără a recurge la formula lui HERON. La problema 30 notarea necunoscutei cu 0 dă loc la confuzii şi curiosităţi ca $0 = 7$! S'au mai strecurat apoi şi unele erori de tipar. Toate acestea se pot însă înlătură la o a doua ediţiune.

I. I.

CERERI.

181. Un văr al Domnitorului MIHAIL STURZA stabilit la Odesa, care semnà A. DE STOURDZA, vorbeşte în o scrisoare din 24 Aprilie 1843 Domnitorului de VIARD, oficer superior de geniu din Franţa, fost *profesor de matematici înalte*, la Liceul Richelieu din Paris, care îşi ofereà serviciile pentru armată sau învăţământul în Moldova. Ce se ştie despre acest oficer ca matematician şi dacă eventual a fost chemat la Iaşi?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1584. *Să se elimine* x *şi* y *între relaţiile*

$$\frac{1-x}{x\sin y} - x(1+\sin y) + a + b = 0$$

$$\frac{1}{x} - x + \frac{1}{x\operatorname{tg}^2 y} + \frac{ab}{1+x\sin y} = 0$$

$$a\left(\frac{k}{\sin y} - \frac{1}{a-x}\right) = \mp\sqrt{b^2+4}$$

k *fiind o constantă, a cărei valoare să se determine în funcţie de* a *şi* b.

A. SMÂNTÂNESCU.

Soluţie dată de D-l A. I. STAN (Elev Şc. militară de artilerie, Timişoara).

Observ că

$$\frac{1}{x\operatorname{tg}^2 y} = \frac{x}{x^2\operatorname{tg}^2 y} = \frac{x}{x^2\sin^2 y} - \frac{1}{x}$$

şi notez cu z produsul $x\sin y$. Cu acestea primele 2 relaţiuni din enunţ devin

$$(1)\quad \frac{1-x}{z} - x - z + a + b \quad \therefore \quad x = \frac{1+(a+b)z-z^2}{z+1}$$

$$(2)\quad -x + \frac{x}{z^2} + \frac{ab}{1+z} = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{abz^2}{(z+1)(z^2-1)}.$$

Egalând valorile lui x, scoase din (1) şi (2), se găseşte

$$(3)\quad (z+1)[z^4-(a+b)z^3+(ab-2)z^2+(a+b)z+1]=0$$

$$\therefore \quad z+1=0$$

şi

$$(4)\quad z^4-(a+b)z^3+(ab-2)z^2+(a+b)z+1=0.$$

Soluţia $z=-1$ introdusă în (1) şi (2) conduc la

$$a=b=0$$

oricare ar fi x şi y, iar în acest caz primele două relaţii din enunţ devin nişte identităţi, iar a treia o imposibilitate, deci

$$z+1\neq 0.$$

Ecuația (4) este reciprocă. Pun

$$(5) \qquad z - \frac{1}{z} = u \quad \therefore \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 + 2$$

și (4) devine

$$u^2 - (a+b)\,u + ab = 0$$

$$\therefore \qquad u_1 = a \qquad \text{și} \qquad u_2 = b.$$

Ducând aceste valori în (5) se găsește

$$(6) \qquad z^2 - az - 1 = 0.$$

$$(7) \qquad z^2 - bz - 1 = 0$$

de unde se scoate

$$(8) \qquad z_I = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

și

$$(9) \qquad z_{II} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Ținând seamă că z_I și z_{II} satisfac (6) și (7), valorile lui x date de (1) se pot scrie respectiv

$$x_I = \frac{bz_I}{1 + z_I} \qquad \text{și} \qquad x_{II} = \frac{az_{II}}{1 + z_{II}}$$

sau încă

$$(10) \qquad x_I = \frac{b\,(a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2 + b \pm \sqrt{a^2 + 4}}.$$

$$(11) \qquad x_{II} = \frac{a\,(b \pm \sqrt{b^2 + 4})}{2 + b \pm \sqrt{b^2 + 4)}}.$$

Relațiunile (8), (9), (10) și (11) dau valorile lui x și $x \sin y$ scoase din primele 2 egalități ale enunțului. Introducând aceste valori în a treia egalitate din enunț se găsește rezultatul eliminării. Ori relațiunea aceasta se mai poate scrie

$$(12) \qquad k\frac{x}{x \sin y} - \frac{1}{a - x} = \frac{\mp \sqrt{b^2 + 4}}{a}.$$

Introducând deci pe x și z prin valorile lor se găsește ca

rezultat al eliminării cerute în enunț următoarele două relațiuni de condiție între k, a și b:

$$(13)\qquad \frac{2bk}{2+a+\sqrt{a^2+4}} - \frac{2+a+\sqrt{a^2+4}}{2a+(a-b)\sqrt{a^2+4}} = \frac{+\sqrt{b^2+4}}{a}.$$

$$(14)\qquad \frac{2ak}{2+b+\sqrt{b^2+4}} - \frac{2+b+\sqrt{b^2+4}}{2a} = \frac{+\sqrt{b^2+4}}{a}.$$

Efectuarea calculelor în (13) nu conduce la vre-o relațiune simplă sau interesantă, pe când din (14) se deduce

$$\frac{2ak}{2+b+\sqrt{b^2+4}} = \frac{+\sqrt{b^2+4}}{a} + \frac{2+b+\sqrt{b^2+4}}{2a} = \frac{2+b+\sqrt{b_2+4}}{2a}.$$

$$\therefore \quad 2ak = \frac{(2+b)^2-(\sqrt{b^2+4})^2}{2a} = \frac{2b}{a}.$$

$$(15)\qquad \therefore \quad k = \frac{b}{a^2}.$$

Se vede că pentru valorile (9) ale lui z și (11) ale lui x rezultatul eliminării cerute este relațiunea simplă (15).

Valoarea lui k se deduce din (13) sau este dată de (15).

Notă. Enunțul inițial al problemei 1584 a fost rectificat la pagina 158 vol. XX.

PROBLEMA 2809. *Fie* M *un punct mobil pe ipotenusa* BC *a unui triunghiu dreptunghic* ABC *și* Q *proecția lui* M *pe* AB. *Se unește mijlocul catetei* AC *cu* M *și se proectează* Q *în* P *pe* DM. *Se cere să se afle locul punctului* P *când* M *se mișcă pe dreapta* BC *și variația distanței lui* P *la o dreaptă fixă paralelă cu* AC.

COL. GH. BUICLIU.

Se iau ca axe coordonate cateta AC și perpendiculara pe ea în D. Fie B′(0, b) mijlocul ipotenuzei BC, C(c, 0) și M(α, β). Avem Q($-c$, β).

Ecuațiile dreptelor BC, MD și QP vor fi

$$(BC) \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

$$(DM) \qquad \alpha y - \beta x = 0$$

$$(QP) \qquad y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x + c)$$

$M(\alpha, \beta)$ verifică ecuația (BC). Locul lui P se găsește deci eliminând pe α, β între ecuațiile (BC) după ce s'a înlocuit x și y prin α și β și ecuațiile (DM) și (QP). Rezultatul eliminării este

$$(1) \qquad cy^3 + bxy^2 + cx^2y + bx^3 - bcy^2 + c^2xy + bcx^2 = 0.$$

Locul cerut este deci cubica (1).

Variația lui y scos din (1) reprezintă variația distanței dela P la AC. Distanța dela P la o dreaptă paralelă cu AC va fi $y+d$. Deci partea a doua a problemei se rezolvă construind curba a cărei ecuație se obține din (1) prin înlocuirea lui y prin $y + d$, în care d este constant. Se găsește ca variație o curbă analoagă cu (1).

Observațiuni.

1°. Problema a fost rezolvată de D-l Em. Manolescu pe când era elev la Lic. Militar Iași și de D-l S-lt. M. Focșeneanu pe când era elev în Șc. Specială a Artileriei.

2°. Curba (1) este o cubică unicursală cu punctul dublu în D, având pe AB ca tangentă în origină și o asimptotă paralelă cu BC. Se verifică ușor că (1) trece prin B' și B.

3°. Ecuația parametrică a curbei (1) este

$$y = tx$$

$$x = c\,\frac{t^2 - mt - 1}{mt^3 + t^2 + mt + 1},$$

în care m este raportul c/b.

4°. De oarece (1) se poate pune sub forma

$$F(x, y, x^2 + y^2) = 0,$$

rezultă că locul lui P este podara unei conice.

Gh. B.

PROBLEMA 3615. *Se consideră un triunghiu oarecare* ABC *și* I *centrul cercului său înscris.*

Se prelungește $\overline{CB}$ *cu* $\overline{BB'} = \overline{BA}$ *și* BC *cu* $CC' = \overline{CA}$. *Dreptele* IB' *și* IC' *taie respectiv pe* AB *și* AC *în punctele* D *și* E.

Să se arate că DE *este paralelă cu* BC *și să se calculeze distanța ei la* BC.

Emil Ștefănescu.

Bisectoarea exterioară BI a triunghiului isoscel ABB′ este paralelă cu baza AB′; asemenea CI este paralelă cu AC′, deci avem relațiunile:

$$(1)\qquad \frac{ID}{IB'}=\frac{BD}{BA}=\frac{IB}{AB'+IB} \quad \text{și} \quad \frac{IE}{IC'}=\frac{CE}{CA}=\frac{IC}{AC'+IC}.$$

Insă, triunghiurile BIC și B′AC′, având unghiurile egale, sunt asemenea, deci

$$(2)\qquad \frac{IB}{AB'}=\frac{IC}{AC'}=\frac{BC}{BC'}$$

sau încă

$$(3)\qquad \frac{IB}{AB'+IB}=\frac{IC}{AC'+IC}=\frac{BC}{B'C'+BC}.$$

Comparând relațiunile (1) și (3) deducem imediat

$$(4)\qquad \frac{ID}{IB'}=\frac{IE}{IC'}, \left(\text{sau } \frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA}\right)$$

adică dreapta DE este paralelă cu B′C′ (sau BC).

Fie acum II′ distanța punctului I la BC (raza cercului înscris, r) și G punctul unde II′ taie pe DE. Avem în primul rând.

$$(5)\qquad GI'=II'-IG=r-IG.$$

Dreapta DE fiind paralelă cu B′C′, avem

$$\frac{IG}{II'}=\frac{IE}{IC'}=\frac{IC}{AC'+IC}=\frac{BC}{B'C'+BC}.$$

Intrebuințând notațiunile obicinuite pentru triunghiul ABC, putem scrie din relațiunea de mai sus, că

$$\frac{IG}{r}=\frac{a}{2p+a}$$

de unde deducem:

$$(6)\qquad IG=\frac{ar}{2p+a}.$$

Inlocuind valoarea lui IG în relația (5) avem:

$$GI'=\frac{2pr}{2p+a}=\frac{2S}{2p+a}.$$

Observări: I. D-l Aurel Pârvu (student matematici București) a dat o soluțiune problemii, aplicând teorema lui Menelaus celor două triunghiuri formate de bisectoarea AI în triunghiul ABC și considerând ca transversale dreptele B'I și C'I.

II. D-l Emil Ștefănescu, propunătorul problemii, demonstrează proprietatea calculând, cu ajutorul relațiunilor trigonometrice dintr'un triunghiu dreptunghiu, distanțele punctelor D și E la latura BC și arătând că sunt egale ambele cu $rh_a : r + h_a$, expresiune echivalentă cu valoarea dată mai sus.

III. Dacă însemnăm distanța GI' cu d_a și analoagele ei cu d_b, d_c avem relațiunea

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{4}{r}.$$

IV. In cazul când se înlocuiește centrul I al cercului înscris triunghiului ABC, prin centrul I_a (de exemplu) al cercului exînscris al triunghiului ABC, trebuie să luăm segmentele $\overline{BB'} = \overline{AB}$ și $\overline{CC'} = \overline{AC}$ către interiorul triunghiului ABC (adică în sens invers de cum am luat în cazul centrului I).

Avem în acest caz $I_a B$ paralel cu AB', iar $I_a C$ paralel cu AC' și ca urmare relațiunile:

$$(1') \qquad \frac{\overline{I_a B}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DI_a}}{\overline{DB'}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{I_a C}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{EI_a}}{\overline{EC'}};$$

dar triunghiurile BI_aC și B'AC' sunt asemenea, deci

$$(2') \qquad \frac{\overline{I_a C}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{I_a B}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

și comparând cu (1') deducem

$$(3') \qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\right),$$

adică dreapta DE este paralelă cu BC.

Discuțiune. Fie L punctul unde bisectoarea AI_a taie latura opusă BC. Avem în acest caz, relațiunea cunoscută

$$(4') \qquad \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Dacă presupunem că $I_a B'$ *este paralelă cu* AB, *avem* $BL = \frac{1}{2} BB' = \frac{1}{2} AB$, dar atunci din relațiunea (4') rezultă că și

$\overline{CL} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CC'}$ şi cum din paralelogramul ABI_aB' rezultă că $\overline{AL} = \overline{LI_a}$, urmează de asemenea că ACI_aC' este paralelogram, deci că I_aC' este paralelă cu AC. Aşa dar în acest caz singular, dreapta DE este aruncată la infinit.

Dacă presupunem că $\overline{AB} = \overline{BB'} < 2\overline{BL}$ (α), rezultă din (4') că avem şi relaţiunea

$$\overline{AC} = \overline{LC} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BL}} < 2\,\overline{LC}.$$

Dar din triunghiurile asemenea ALB' şi BLI_a avem că

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{BI_a}} = \frac{\overline{LB'}}{\overline{LB}} < 1,$$

deci I_aB' întâlneşte pe $\overline{BA}$ dincolo de punctul A. Asemenea din asemănarea triunghiurilor ALC' şi CLI_a avem că

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{CI_a}} = \frac{\overline{LC'}}{\overline{CL}} > 1,$$

deci că I_aC' taie pe $\overrightarrow{CA}$ dincolo de punctul A.

In fine, dacă presupunem că $\overline{AB} = \overline{BB'} > 2\overline{BL}$ (β) avem ca urmare

$$\overline{AC} = \overline{LC} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BL}} > 2\overline{CL},$$

şi în acest caz avem întocmai ca şi în cazul precedent:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{LB'}}{\overline{LB}} > 1 \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{CI_a}} = \frac{\overline{LC'}}{\overline{CL}} > 1,$$

adică dreptele I_aB' şi I_aC' taie respectiv pe AB şi AC dincolo de punctele B şi C,

Să însemnăm acum cu L' şi L'' punctele unde bisectoarele BI_b şi CI_c taie laturile opuse AC şi AB. Observăm în primul rând că două din dreptele DE, (relative de exemplu la vârfurile A şi B) nu pot fi aruncate la infinit.

Dacă presupunem într'adevăr că $\overline{AB} = 2\overline{BL}$, deci şi $AC = 2LC$ avem şi (5') $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{BC}$; deci dacă presupunem şi pentru L' aceleaşi ipoteze am avea asemenea (6') $\overline{BC} + \overline{BA} = 2\overline{CA}$. Insă din (5')

şi (6') rezultă imediat că $2\overline{AB}=\overline{CA}+\overline{CB}$, şi folosind relaţiile

$$\frac{\overline{AL''}}{\overline{L''B}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad \text{şi} \quad \overline{AL''}+\overline{L''B}=\overline{AB},$$

rezultă că

$$\overline{CB}=2\overline{L''B} \quad \text{şi} \quad \overline{CA}=2\overline{L''A},$$

deci şi a treia dreaptă DE este aruncată la infinit.

Dacă presupunem două din dreptele DE în aceeaşi aşezare faţă cu triunghiul ABC (dincolo de vârf sau dincolo de bază ambele), de exemplu $\overline{AB}+\overline{AC}\leq 2\overline{BC}$ şi $\overline{BC}+\overline{BA}<2\overline{CA}$, urmează neapărat că $2\overline{AB}<\overline{BC}+\overline{AC}$, adică dreapta DE corespunzătoare vârfului C nu are aceeaşi aşezare ca celelalte două.

Din această discuţiune se vede că distanţa dreptei DE (corespunzătoare de exemplu vârfului A) are un semn pe care îl putem hotărî convenţional: pozitiv dacă dreapta DE este de aceeaşi parte cu vârful A faţă cu baza BC, negativ în cazul contrar. Tot din discuţiunea precedentă se vede că dacă una din distanţe este infinită, celelalte două analoage sunt de semne contrarii, că în cazul general numai două pot avea acelaş semn.

Dacă însemnăm cu H şi G punctele unde perpendiculara dusă din I_a la BC taie respectiv pe BC şi DE, avem

$$d_a+r_a-\overline{I_aG}=0\ (\gamma).$$

Insă considerând pe rând perechile de triunghiuri asemenea ($I_aB'C'$, I_aDE), (DAB', DBI_a); ($AB'C'$, I_aBC) avem relaţiunea

$$\frac{\overline{I_aG}}{\overline{I_aH}}=\frac{\overline{I_aD}}{\overline{I_aB'}}=\frac{\overline{I_aB}}{\overline{I_aB}-\overline{AB'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}-\overline{B'C'}}$$

însă $\overline{B'C'}=b+c-a$ deci $\overline{I_aG}=\dfrac{ar_a}{2a-b-c}$

şi ca urmare

$$d_a=\frac{(b+c-a)\,r_a}{2a-b-c}=\frac{2S}{2a-b-c}.$$

Dacă socotim suma inverselor distanţelor corespunzătoare celor trei drepte DE, avem relaţiunea

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}=0$$

care subzistă în toate cazurile.

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3723. *Să se arate că expresiunea:*

$$(3^m - 2m^2 - 1)(5^{4n+3} + 4^{6p+1} + 1)$$

se divide cu 208, dacă m, n, p, *sunt întregi.*

I. MURĂROIU.

Soluțiune dată de D-ra JUSTINA GURĂU (studentă, București) și D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, GH. TH. GHEORGHIU-GLADIȘ, HRISTACHE ȘT. DĂSCĂLESCU (studenți, București), IUSTIN N. VÂLCEANU (Tg.-Jiu), NICOLAE O. ZAHARIA (Constanța), D-TRU H. IANCU (Iași), IOAN C. VONICA (Tg.-Cărbunești), MIRCEA V. RAȚIU și PETRE I. GHIȘOIU (București), VASILE GH. DRĂGUȚ (Târgoviște), E. I. DUMITRESCU (Buzău).

In primul rând se observă, că factorul $E = 3^m - 2m^2 - 1$ este un multiplu de 8, oricare ar fi m întreg și pozitiv.

Intr'adevăr, dacă $m = 2r$, avem

$$E = 9^r - 8r^2 - 1 = (M8 + 1)^r - 8r^2 - 1 = M8 + 1 - 8r^2 - 1 = M8,$$

iar, dacă $m = 2r + 1$, avem

$$E = 3 \cdot 9^r - 2(4r^2 + 4r + 1) - 1 = 3(M8 + 1)^r - M8 - 2 - 1 = M8.$$

Celalt factor al expresiunii date, $E' = 5^{4n+3} + 4^{6p+1} + 1$ este un multiplu al lui *26*, dacă n și p sunt întregi și pozitivi.

In primul rând având $5^3 = M26 - 5$ și $5^4 = M26 + 1$ avem și $5^{4n+3} = M26 - 5$.

Apoi, $4^3 = M26 + 12$, iar $4^6 = M26 + 144 = M26 + 14 = M13 + 1$, deci $4^{6p+1} = 4 M13 + 4 = M26 + 4$, și ca urmare $E' = M26 - 5 + M26 + 4 + 1 = M26$.

C. C. E. D. D.

Observare.

Expresiunea E' este divizibilă și cu numărul 5, de oarece $4^2 = M5 + 1$, deci $4^{6p+1} = M5 + 4$, prin urmare expresiunea dată se divide cu numărul $208 \times 5 = 1040$.

NICOLAE O. ZAHARIA.

Au rezolvat parțial problema D-nii: M. UNGHEANU, D. BOLGAR și A. BIDOIANU.

*PROBLEMA 3724. *Fie* H *ortocentrul triunghiului* ABC, A' *piciorul înălțimii coborîtă din vârful* A, M *un punct oarecare depe cercul circumscris, iar* Q *ortocentrul triunghiului* BMC.

Se cere să se construiască triunghiul ABC, *când se cunosc punctele* H, A', M *și* Q.

AUREL PÂRVU.

Soluțiune dată de D-nii: N. ANTONESCU (Târgoviște), ADRIAN C. GHEORGHIU (București), EMILIAN I. MIHALCEA (Buzău), PETRE I. GHIȘOIU (București), GH. TH. GHEORGHIU-GLADIȘ, PANAITE N. THEODOR, OVIDIU BIRCEANU.

Presupunem problema rezolvată. Fie H_a punctul unde HA' taie cercul ABC, iar Q_a punctul unde MQ taie acelaș cerc. Punctele H_a și Q_a sunt respectiv simetricile punctelor H și Q în raport cu dreapta BC. Dreptele HA' și MQ fiind ambele perpendiculare pe BC sunt paralele.

De altă parte, ortocentrul și unul din vârfurile triunghiului sunt totdeauna de aceeași parte a laturei determinată de celelalte două vârfuri. De exemplu, dacă $\sphericalangle A$ este ascuțit, H este interior triunghiului ABC; dacă $\sphericalangle M$ este obtuz, M este interior triunghiului BQC.

Acum să presupunem că punctele H, A', M, Q sunt date astfel ca segmentele HA' și MQ sunt paralele și nu traversează dreapta Δ, perpendiculară pe HA' în punctul A'. In acest caz, construim punctele H_a și Q_a simetricile punctelor H și Q în raport cu dreapta Δ. Cercul MH_aQ_a determină pe A'H vârful A, iar pe dreapta Δ vârfurile B și C.

In cazul când *dreptele* HA' și MQ sunt confundate, problema este nedeterminată. Dacă Q nu coincide cu H, segmentele $\overline{HA'}$ și $\overline{MQ}$ nu sunt de aceiași parte a laturei $\overline{BC}$. In acest caz simetricul lui Q este chiar vârful A, iar M și H sunt simetrice în raport cu BC. Dacă această din urmă condițiune nu este îndeplinită, problema este imposibilă.

In cazul când ea este îndeplinită, există o infinitate de triunghiuri toate cu vârful în A și baza BC pe dreapta Δ perpendiculară pe HA' în punctul A'. Unul din triunghiuri se poate construi astfel: După ce am construit vârful A și dreapta Δ, luăm pe Δ vârful B arbitrar, apoi din A ducem o perpendiculară pe BH, care determină pe Δ vârful C.

Locul centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor soluțiuni este o paralelă la Δ, situată de aceeași parte cu H și la distanța $\delta = \frac{1}{2}HA$.

In cazul când M se găsește pe dreapta Δ, el este unul din vârfurile B (sau C), și în acest caz, Q trebuie să coincidă și el cu B, pentruca problema să fie posibilă.

Problema revine, în acest caz, la a construi un triunghiu cunoscând un vârf B, direcțiunea laturei BC și ortocentrul H. Problema admite o infinitate de soluțiuni.

Locul centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor soluțiuni este dreapta perpendiculară pe mijlocul segmentului BH_a.

Observarea I. D-l Petre I. Ghișoiu observă că în locul punctului M se puteà, mai general, să se deà pe lângă punctele H, A', Q, un punct oarecare N de pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Observarea II. D-nii: Ioan C. Vonica (Tg.-Cărbunești) și Justin N. Vâlceanu (Tg.-Jiu) determină întâi vârful A observând că $HA = MQ$, apoi cu cercul AH_aM determină pe Δ vârfurile B și C.

Observarea III. D-l Eugen I. Dumitrescu (Buzău) observă că cercul BQHC este *simetricul* cercului circumscris triunghiului ABC în raport cu dreapta BC, prin urmare punctele Q și H fiind cunoscute, este de ajuns să luăm R simetricul punctului M în raport cu dreapta Δ perpendiculară pe HA' în punctul A', ca acest cerc să fie construit. Apoi cercul BMC taie pe A'H determinând vârful A de aceeași parte cu H.

Au rezolvat problema, fără să examineze condițiunile de posibilitate, D-nii: H. Dăscălescu, C. I. Drăgan, Mircea I. Grossu, N. O. Zaharia, Aurelian I. Călinescu, Alex. Arsene, I. C. Savin, C. I. Râmniceanu.

PROBLEMA 3757. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x = \cos x + \operatorname{cotg} x + \sec x.$$

C. V. Costăchescu.

Soluțiune dată de D-nii: Iulian Alexiu, Aurel Em. Bădescu (Liceul Militar M-rea Dealului), Cezar Coșniță (Bârlad), Petre I. Ghișoiu (Liceul Spiru Haret București), Mircea I. Grossu

(Liceul Carol Craiova), HARALAMB P. IONESCU, CONST. D. IONESCU-ȚIU (Școala militară geniu), IOAN V. MĂTIEȘ (Cluj), JUSTIN N. VÂLCEANU (Tg.-Jiu), N. N. VELICESCU, TITUS GH. VELICESCU.

Putem scrie succesiv:

$$\sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x = \cos x + \operatorname{cotg} x + \sec x$$

$$\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin^2 x \cos x + \sin^2 x + \cos x = \sin x \cos^2 x + \cos^2 x + \sin x$$

$$\sin^2 x \cos x + \sin^2 x + \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cos x (\sin x - \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x + \cos x - \sin x = 0$$

$$(\sin x \cos x + \sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0.$$

De unde rezultă mai întâi

(1) $\sin x - \cos x = 0 \qquad \sin x = \cos x$

sau

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Apoi trebuie să avem

(2) $\sin x \cos x + \sin x + \cos x - 1 = 0$

sau

$$\sin x (1 + \cos x) - (1 - \cos x) = 0.$$

Dacă ținem seamă că

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

și

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

rezultă

$$\sin x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Obținem

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x}{2} = k\pi \; ; \; x_2 = 2k\pi.$$

Apoi

$$2\cos^3 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$$

deci

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

sau

$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\right) = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1.$$

Deci

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

sau

$$x_3 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ecuația $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 = 0$ neavând soluțiuni reale nu dă o soluție acceptabilă pentru x.

Observație. Soluția $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$ verifică ecuația.

Celelalte două dau valori nedefinite ambilor membri ai ecuației, deci sunt neadmisibile.

Au dat soluțiuni mai puțin bune sau găsind numai valori particulare pentru x, D-nii: Ioan Boian (Tg.-Mureș), T. N. Donciu (Bârlad), Fl. Dinoci (Argeș), Emilian I. Mihalcea (Buzău), Ioan C. Savin (Iași).

A. B.

---

*PROBLEMA 3788. *Aria unui triunghiu se poate calculà cu formula*:

$$S = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin A \sin B/\sin(A - B).$$

Care este expresiunea ariei dacă $A = B$?

I. Ionescu.

Soluție dată de D-nii: GH. TH. GHEORGHIU-GLADIȘ (Student, București); C. I. IONESCU-ȚIU (Șc. Militară de Geniu, București); I. ALEXIU (București); C. COȘNIȚĂ (Bârlad): I. N. VÂLCEANU (Târgu Jiu); P. I. GHIȘOIU (București); N. N. VELICESCU, N. D. POPESCU, N. ALDEA, N. O. ZAHARIA.

Pentru A=B și deci $a=b$, formula dată ia forma nedeterminată 0/0. Trebuie scos dela numărător și numitor un factor comun care se anulează pentru A=B. Avem:

$$a = 2R \sin A, \qquad b = 2R \sin B,$$

și deci:

$$a^2 - b^2 = 4R^2 (\sin^2 A - \sin^2 B)$$

Avem însă (*Culegere de Probleme. Trigonometria* V. 1):

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B) \sin(A - B),$$

astfel că relația precedentă devine:

$$a^2 - b^2 = 4R^2 \sin(A + B) \sin(A - B).$$

Inlocuind în formula dată în enunț, găsim:

$$S = 2R^2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin(A + B).$$

Aceasta nu este decât formula:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

dată în *Nota Matematică* cu „*Formule simetrice pentru aria triunghiului*“ din *Gazeta Matematică* Anul XXXIV pag. 342, în care s'a înlocuit sinC, prin sin(A+B).

Dacă facem A=B în formula obținută avem:

$$S = 2R^2 \sin^2 A \sin 2A,$$

sau înlocuind $2R \sin A$ prin a, avem:

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2A,$$

sau:

$$S = a^2 \sin A \cos A.$$

*EXERCIŢII

1. Se cer patratele *mszu* in care

$$\sqrt[3]{m} = \sqrt[2]{u}\ .$$

M. I. G. Ungheanu.

R. Putem luà $m = 1$, deci $u = 1$ sau $m = 8$, deci $u = 4$. Cum *zu* termină un patrat am aveà soluţiile 1*s*01, 1*s*21, 1*s*41, 1*s*61, 1*s*81, 8*s*04, 8*s*24, 8*s*44, 8*s*64, 8*s*84. Căutând a extrage rădăcina găsim $1521 = 39^2$; $1681 = 41^2$ şi $8464 = 82^2$.

2. Se cer patratele *dmszu* in care *du* e patrat si $m = du$.

M. I. Ungheanu.

R. Patratele de două cifre fiind 16, 25, 36, 49, 64, 81, numărul căutat poate fi 17*sz*0, 27*sz*5, 39*sz*6, 89*sz*1. Căutând a extrage rădăcina găsim soluţiile *17956, 27225, 89401.*

3. Se cere patratul *abcdefg* in care *a* e patratul lui *e* iar *ceg* patratul lui *ed.*

G. P. Boerescu.

R. Prima condiţie cere $a = 1$; $e = 1$; $a = 4$, $e = 2$; $a = 9$, $e = 3$. Dintre patratele de trei cifre la care $ceg = (ed)^2$ nu e decât $529 = 23^2$. Numărul e de forma 4*b*532*f*9. Căutând a extrage rădăcina găsim : $4853209 = 2203^2$.

PROBLEME PROPUSE.

*3811. Se cer patratele mai mici ca 10.000 ale căror complimente aritmetice sunt tot patrate. Există cuburi în aceste condiţiuni?

V. I. Crivăţ.

*3812. Se cer numerele *abc, acb, cba* toate patrate perfecte.

N. Zaharia.

*3813. Fiind dată o linie frântă plană ABCD, să se determine în planul ei un punct S astfel ca suprafeţele SAB, SBC, SCD să fie egale.

P. Trofimov.

* 3814. Se dă un trapez oarecare ABCD (AB şi CD fiind laturile paralele). Dreapta paralelă cu bazele trapezului, care pleacă din mijlocul F al laturei BC, taie diagonalele AC şi BD în punctele G şi H. Se construiesc paralelogramele ABED şi GHKE.

Ce condiţiune trebuie să îndeplinească trapezul dat, pentru ca BK şi EF să se întâlnească pe diagonala AD?

V. Dorneanu.

* 3815. Une droite Δ antiparallèle au côté BC coupe les côtés BA et AC d'un triangle en C_1 et B_1. Les parallèles à AC et AB issues de ces points se coupent en A_1 et rencontrent BB_1 et CC_1 en M et N. On a la relation d'aires

$$\overline{A_1B_1C_1^2} = \overline{ABC} \times \overline{A_1MN}.$$

V. Thébault.

* 3816. Se dă triunghiul ABC şi un punct M mobil pe BC. Care este poziţia lui M pentru care $(\overline{AM}^2 : BM)$ este minimă?

I. Ionescu.

* 3817. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând mijloacele A_1 şi C_1 ale laturilor BC şi AB, punctul φ al lui Feuerbach, precum şi unghiul $C_1\varphi B_1$, punctul B_1 fiind mijlocul laturei AC.

Petrică I. Ghişoiu.

* 3818. a, b, c fiind laturile unui triunghiu şi r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise acelui triunghiu, să se arate că avem relaţiunea

$$\Sigma\, r_a^3 (r_b - r_c)^3 = 3p^3 (a-b)(b-c)(c-a).$$

Virgil C. Popescu.

* 3819. Să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea

$$x^2 + x^2z + z^2x + z^2y + xy + yz + xz + xyz = 105.$$

P. I. Ghişoiu.

3820. Să se studieze şi să se construiască curba dată de ecuaţiunea:

$$y = \frac{6(2x-1)^2}{8x^3 + 9(2x-1)}.$$

M. Nicolau.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. (3656, 66, 723, 41, 65, 77, 88, 96, C, R); *Alexandrescu I.* (3653, 56, 92); *Almăjan P.* (3741, 79, N); *Antonescu N.* (3803); *Bădescu E. A.* (3755, 96); *Bidoianu A.* (3777, 802, P); *Boerescu Gh.* (E); *Burlan Eug.* (3741, 42); *Cristescu A.* (3746, 52); *Coşniţă Cezar* (2773, 3488, 785, N, P); *Crivăţ I. V.* (3752, 92, 803, E); *Curchi J.* (P); *Donciu N.* (3648, 758); *Dumitrescu G. T.* (3774, 77); *Gheorghiu A.* (N); *Gheorghiu-Gladiş Gh.* (2443, 58, 960, 3419, 518, 89, 658, 87, 715, 56, 70, 89, 94, 96, 98); *Ghişoiu P.* (3777, 85, 87); *Ionescu H.* (3752, E); *Ionescu-Ţiu D. C.* (3656, 740, 56, 92); *Ionescu I.* (3714, 77); *Mătieş V. I.* (1949, 3794, P); *Mocănescu I.* (3742); *Murăroiu I.* (3134, 611, 715, 77, P); *Negrea M.* (3740); *Novăcu V.* (3676, 766, P); *Popa G. I.* (3802); *Popescu N.* (3728); *Răşcanu R.* (3692, 746, 57, 77); *Rentea Gr. N.* (3802); *Şerban-Ulmeni D.* (2440, 3565); *Stan D. A.* (2448, R); *Ţilenschi S.* (3737); *Ungheanu I. G.* (3777, E, P, R); *Ungureanu I. M.* (3802); *Vâlceanu I.* (3789); *Velicescu N. N.* (3698, 714, 37, 77, E, P); *Velicescu T.* (3607, 68, 777, 802, P); *Voicu C. I.* (3802); *Voicu G. N.* (3742); *Zaharia O. N.* (3741, 77, 88, 96, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 100 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer Inspector General C. Malcoci, Directorul General al Exploatării Monopolurilor (adresa: Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXV.

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1929.

SUMARUL

1. *Sur des théorèmès de Neuberg et de Gob . *V. Thébault.*
2. Asupra ecuaţiei de gradul al treilea . . *Petre Sergescu.*
3. Inegalităţi trigonometrice . . . . . *Nicolae O. Zaharia.*
4. Note matematice: 5 — 10.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 182.
7 Probleme rezolvate: 2879, 3305, 3449, 3611, 3648, 3687, 3737, 3741, 3743, 3767.
8. Exerciţii: 4 — 7.
9. Probleme propuse: 3774, 3797, 3821 — 3830.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

BUCUREŞTI
IMPRIMERIILE STATULUI
1929

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXV se compune din D-nii: **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului; **O. Ţino**, Doctor în Matematici, Profesor în Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer Inspector General, Directorul General al Exploatării Monopolurilor, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 501, 02, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 38, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 65, 69, 85, 208, 30, 55, 60, 75, 78, 92, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 90, 400, 05, 20, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 24, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 69, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 49, 62, 73, 76, 80, 84, 93, 97, 99, 800, 01, 04, 05, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXV se compune din D-nii: **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului; **O. Ţino**, Doctor în Matematici, Profesor în Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer Inspector General, Directorul General al Exploatării Monopolurilor, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 501, 02, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 38, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 65, 69, 85, 208, 30, 55, 60, 75, 78, 92, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 90, 400, 05, 20, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 24, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 69, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 49, 62, 73, 76, 80, 84, 93, 97, 99, 800, 01, 04, 05, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

ANUNȚ

Rugăm pe toate persoanele care au primit Nr. 1, Vol. XXXV din „Gazeta Matematică“, să binevoiască a ne comunică de urgență dacă intenționează să se aboneze la revistă, trimițând totodată prin mandat poștal abonamentul de **Lei 200**.

De asemenea rugăm pe Domnii abonați cari au trimis numai **Lei 100**, să complecteze abonamentul la **Lei 200**, cunoscând că în caz contrar nu vor mai primi Nr. 3 al revistei.

GAZETA MATEMATICĂ.

* SUR DES THÉORÈMES DE NEUBERG ET DE GOB.

Nous nous proposons de donner, pour les jeunes lecteurs, des démonstrations synthétiques, avec des compléments, de propriétés du triangle dues à J. NEUBERG et GOB. Ces géomètres les ont établies avec beaucoup d'élégance en utilisant la composition de forces portées par les côtés du triangle [1]).

1. Soient un triangle ABC, (O) son cercle circonscrit de rayon R, (I) son cercle inscrit de rayon r ; D_a et E_a , D_b et E_b , D_c et E_c , les points de BA et AC, BA et BC, CB et CA, tels que

$$BD_a = CE_a = BC, \quad AD_b = CE_b = CA ; \quad BD_c = AE_c = AB.$$

Les bissectrices AI, BI, CI recoupent le cercle (O) respectivement en A', B', C', aux milieux des arcs BC, CA, AB. Les triples de points

$$(B, I, C), \qquad (C, I, A), \qquad (A, I, B),$$

appartiennent chacun à une circonférence de centre A', B', C'.

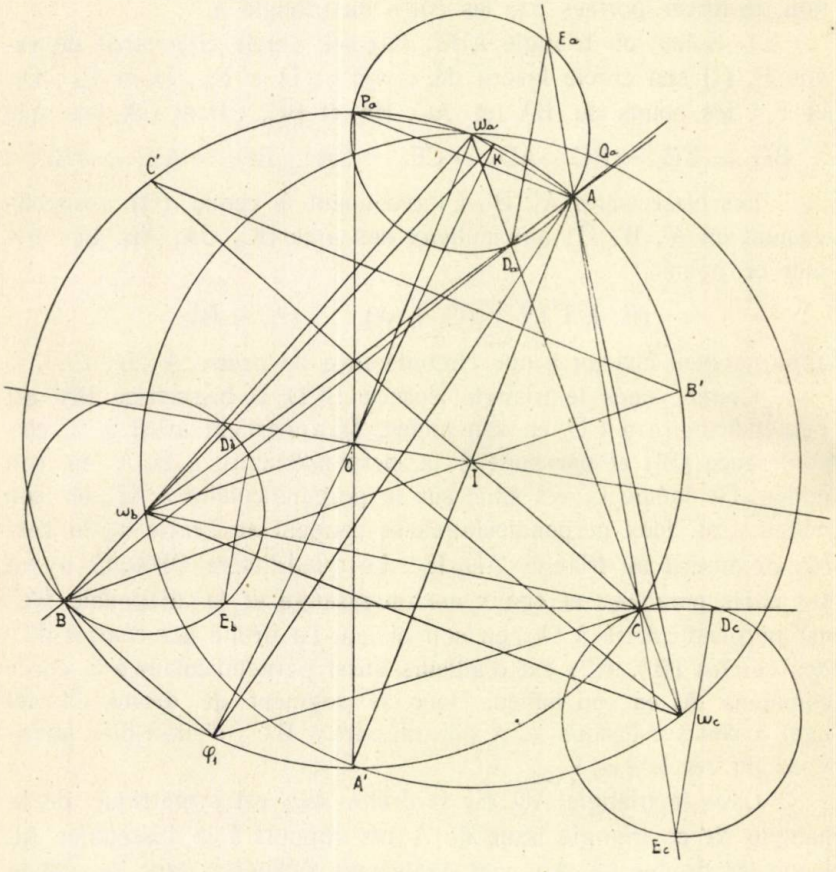
Comme dans le triangle isoscèle BCD_a la bissectrice BB' est perpendiculaire à CD_a en son milieu, D_a appartient aussi à la circonférence (B') et par suite à la perpendiculaire à $D_a A$ en son milieu. De même C' est situé sur la perpendiculaire à AE_a en son milieu. Ces deux perpendiculaires se coupent au centre ω_a du cercle circonscrit au triangle $AD_a E_a$. Le quadrilatère $OB'\omega_a C$ ayant ses côtés parallèles et égaux est un losange et la diagonale B'C' est perpendiculaire à $O\omega_a$ en son milieu. La droite des centres B'C' des cercles (B'), (C') est d'ailleurs aussi perpendiculaire à la corde commune AI en son milieu. Donc le segment de droite OI est égal à son symétrique $\omega_a A$ par rapport à B'C', c'est-à-dire au rayons du cercle (ω_a).

Dans le triangle $AD_a E_a$ la droite $A\omega_a$ est symétrique de la hauteur de ce triangle issue de A par rapport à la bissectrice AI. Donc les droites OI, $A\omega_a$ sont également inclinées, dans le même sens, sur AI et par suite sont parallèles ; autrement dit $D_a E_a$ *est*

1) J. NEUBERG, *Journal de G. de Longchamps*, 1888—49 et 73.
GOB, *Notes de Géométrie récente, (Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 1889).

perpendiculaire à OI. Il en est de même de $D_b E_b$, $D_c E_c$, d'où ce théorème :

Sur les côtés BA, CA *d'un triangle* ABC *on prend les longueurs* $BD_a = CE_a = BC$. *Le segment de droite qui joint les centres* O, I *des cercles circonscrit et inscrit au triangle est perpendiculaire à la droit* $D_a E_a$ *et égale au rayon du cercle circonscrit au triangle* $AD_a E_a$ [1]).



2. Soient (ω_a), (ω_b), (ω_c) les cercles circonscrits aux triangles $AD_a E_a$, $BD_b E_b$, $CD_c E_c$. Les droites $O\omega_a$, $O\omega_b$, $O\omega_c$ sont respectivement parallèles aux bissectrices AI, BI, CI de ABC.

1) Neuberg et Gob, loc. cit.

Les axes radicaux des cercles (O) et (ω_a), (O) et (ω_b), (O) et (ω_c) perpendiculaires à $O\omega_a$, $O\omega_b$, $O\omega_c$, passent par suite aux points P_a, P_b, P_c diamétralement opposés à A', B', C' sur le cercle (O).

AP_a, BP_b, CP_c sont les bissectrices extérieures des angles A, B, C de ABC. On en déduit que les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) recoupent les bissectrices AI, BI, CI en des points Q_a, Q_b, Q_c diamétralement opposés à P_a, P_b, P_c sur ces cercles. Les droites $P_a Q_a = P_b Q_b = P_c Q_c = 2OI$ sont parallèles à OI. Q_a, Q_b, Q_c sont les intersections de (ω_a), (ω_b) (ω_c) avec le cercle circonscrit à $\omega_a \omega_b \omega_c$.

Puisque

$$R = OA = I\omega_a = I\omega_b = I\omega_c ,$$

le triangle $\omega_a \omega_b \omega_c$ est inscrit dans un cercle (I) égal à (O); son orthocentre est O; comme $I\omega_a$, $I\omega_b$, $I\omega_c$ sont respectivement parallèles à OP_a, OP_b, OP_c, $I\omega_a$, $I\omega_b$, $I\omega_c$ *sont perpendiculaires à* BC, CA, AB.

D'ailleurs *le triangle* $\omega_a \omega_b \omega_c$ *est symétriquement egal au triangle* A'B'C'. *Les droites* IA', IB', IC', *sont les médiatrices du triangle* $\omega_a \omega_b \omega_c$, et $A\omega_b = A\omega_c$; $B\omega_c = B\omega_a$; $C\omega_a = C\omega_b$.

Les couples de droites $(A\omega_b, A\omega_c)$, $(A\omega_c, A\omega_a)$, $(A\omega_a, A\omega_b)$, *symétriques par rapport aux bissectrices* AI, BI, CI, *sont isogonales par rapport à* ABC.

3. Les directions $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ sont symétriques de OI respectivement par rapport á B'C', C'A', A'B', (dont les directions sont celles des bissectrices extérieures du triangle ABC).

On en conclut d'abord que $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ *se coupent en un point* K *du cercle* (O) *circonscrit à* ABC[1]); et puis que $(B\omega_b, C\omega_c)$ *sont respectivement également inclinées sur* (AB, AC), *l'angle d'inclinaison étant celui de* (OI, BC). De même $(C\omega_c, A\omega_a)$ *sont inclinées sur* (BC, AB), *de l'angle* (OI, CA); $(A\omega_a, B\omega_b)$, *sont inclinées sur* (CA, BC) *de l'angle* (OI, AB).

4. Soit φ_1 le point diamétralement opposé à K sur (O). Les droites $\varphi_1 A$, $\varphi_1 B$, $\varphi_1 C$ perpendiculaires à $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ en A, B, C, sont les tangentes aux cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c).

Les égalités d'angles qui précédent établissent *la similitude*

1) E. Lemoine, *Journal de G. de Longchamps*, 1882—253.

des triangles $AD_a E_a$ et $B\varphi_1 C$, $BD_b E_b$ et $C\varphi_1 A$, $CD_c E_c$ et $A\varphi_1 B$. Par suite

$$\frac{\varphi_1 B}{\varphi_1 A} = \frac{CD_c}{CE_c} \quad ; \quad \frac{\varphi_1 C}{\varphi_1 A} = \frac{BE_b}{BD_b} ;$$

d'où

$$\frac{\varphi_1 B + \varphi_1 C}{\varphi_1 A} = \frac{CD_c + BE_b}{CE_c} = 1,$$

en remarquant que

$$c - b = CE_c = BD_b \quad ; \quad CD_c = c - a \quad ; \quad BE_b = a - b.$$

D'après une propriété connue [1]), φ_1 *est le point* de FEUERBACH, *du triangle* $A_2B_2C_2$, *anticomplémentaire de* ABC [2]).

K *est l'orthopôle, par rapport à* $A_2B_2C_2$, *de la perpendiculaire à* OI *issue de l'orthocentre* H *de* ABC.

5. Des résultats analogues à tous les précédents s'appliquent si l'on remplace le centre I du cercle inscrit par ceux I_a, I_b, I_c des cercles exinscrits à ABC.

6. Récemment, M. R. GOORMAGHTIGH a généralisé ainsi le théorème de NEUBERG et GOB :

Soient M_a, M_b, M_c *les projections orthogonales d'un point* M *sur les côtés d'un triangle* ABC et A_1, B_1, C_1 *les milieux de ces côtés. L'on parte sur* BA *et* CA *les segments* AD_a *et* AE_a *respectivement doubles de* B_1M_b *et* C_1M_c, *sur* CB *et* AB *les segments* BE_b *et* BD_b *doubles de* C_1M_c *et* A_1M_a *sur* AC *et* BC *les segments* CE_c *et* CD_c *doubles de* A_1M_a *et* C_1M_c. *Les droites* $D_a E_a$, $D_b E_b$, $D_c E_c$ *sont alors perpendiculaires au diamètre* OM *du cercle circonscrit et les cercles* $AD_a E_a$, $BD_b E_b$, $CD_c E_c$ *ont même rayon égal à* OM [3]).

La démonstration de M. GOORMAGHTIGH utilise des propriétés de l'orthopôle d'une droite par rapport au triangle. Ce géomètre obtient de plus cette généralisation de la propriété indiquée par GOB :

Les tangentes en A, B, C *respectivement aux cercles* $AD_a E_a$, $BD_b E_b$, $CD_c E_c$ *concourent sur le cercle* ABC *en l'an-*

---

1) GODT, *Journal de Grunert*, 1886 — 436.
2) GOB *loc. cit.*
3) R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1928 — 22.

ticomplémentaire ψ_1 *de l'orthopôle* ψ *du diamètre* OM *du cercle circonscrit par rapport à* ABC.

Voici une autre démonstration de cette proposition.

La hauteur du triangle $AD_a E_a$, issue de A, est symétrique de $A\omega_a$ par rapport à la bissectrice AI de ABC. Si l'on trace le segment $\overline{IM_1}$ équipollent au segment $\overline{MO}$, le trapèze $AIM_1\omega_a$ est isocèle. Il en est de même des trapèzes $BIM_1\omega_b$, $CIM_1\omega_c$.

Les droites $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$, symetriques, par rapport aux bissectrices de ABC, de la droite IM_1, se coupent en un point K du cercle ABC. K est d'ailleurs l'orthopôle du diamètre du cercle (O_2) perpendiculaire à IM_1 c'est-à-dire à OM, par rappport au triangle $A_2B_2C_2$ anticomplémentaire de ABC [1]).

Les tangentes en A, B, C, aux cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c), se coupent en un point ψ_1 diamétralement opposé à K sur (O). ψ_1 est l'orthopôle du diamètre du cercle (O_2) perpendiculaire à (Δ_1) [2]), c'est-à-dire l'anticomplémentaire de l'orthopôle ψ du diamètre OM par rapport à ABC.

Ajoutons dans cette figure que les droites $\omega_a M_1$, $\omega_b M_1$, $\omega_c M_1$ sont parallèles aux bissectrices AI, BI, CI de ABC et que

$$AM_1 = \omega_a I, \quad BM_1 = \omega_b I, \quad CM_1 = \omega_c I.$$

7. L'expression du rayons C_a du cercle circonscrit au triangle $AD_a E_a$ conduit facilement à celle de la distance OI des centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

---

1) V. Thébault, *Bulletin de Mathématiques élémentaires,* 1910—259. Voici une démonstration simple de cette proposition.

Soient A_2 B_2 C_2 le triangle anticomplémentaire de ABC, α_2 le pied de la hauteur A_2O de ce triangle, (Δ_1) le diamètre du cercle (O_2) circonscrit à $A_2B_2C_2$ perpendiculaire à OM. La symétrique de la perpendiculaire à (Δ_1), (parallèle à OM), issue de α_2, par rapport à la hauteur $A_2\alpha_2$, passe par l'orthopôle K de (Δ_1) lequel est situé sur (O). (V. Thébault, *Nouvelles annales de Mathématiques,* 1910 — 274).

De plus les droites AK, $A\omega_a$ respectivement symétriques de OM par rapport à $A_2\alpha_2$ et AI font entre elles un angle $(AK, A\omega_a)$ égal à l'angle $AA'\alpha_2$ et les points A, α_2, A' et $(AK, A\omega_a)$ sont sur le cercle (O). Alors $(AK, A\omega_a) \equiv K$.

(V. T.)

2) V. Thébault, *Mathesis,* 1922 — 304.

En utilisant les notations habituelles du triangle, on a

$$\overline{D_a E_a^2} = (a-c)^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)(a-c)\cos A;$$

ou, après quelques réductions

$$\overline{D_a E_a^2} = a^2 - 4a(p-a)(1-\cos A).$$

Comme

$$p - a = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A,$$

$$\overline{D_a E_a^2} = a^2 - 4ar \sin A,$$

et

$$\overline{OI}^2 = C_a^2 = \frac{\overline{D_a E_a^2}}{4\sin^2 A} = \left(\frac{a}{2\sin A}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2\sin A}\right) r = R^2 - 2Rr.$$

V. THÉBAULT.
Le Mans (France).

ASUPRA ECUAȚIEI DE GRADUL AL TREILEA.

1) *Fie o ecuație de gradul al treilea cu rădăcinile 0, α, β. Ecuația derivată are cel puțin o rădăcină al cărui modul e mai mic ca* $|\alpha|$. *Se presupune* $|\alpha| < |\beta|$.

Această teoremă se poate enunța și sub forma echivalentă:

In cercul cu centrul într'un zero al unui polinom și care trece prin zeroul cel mai apropiat al polinomului, se găsește cel puțin un zero al polinomului derivat.

Am găsit de fapt un rezultat mai precis, publicat în *Actele primului congres al matematicienilor polonezi* (1927). Dar vreau să dau aci demonstrația următoare, care e nouă.

Fie m și k rădăcinile ecuației derivate, care e de gradul al doilea. Relațiile între rădăcini și coeficienți dau imediat:

$$m + k = \tfrac{2}{3}(\alpha + \beta), \qquad mk = \frac{\alpha\beta}{3}$$

Insemnând cu accentul *prim* inversele algebrice, aceste relații dau:

$$(1) \qquad m' + k' = 2(\alpha' + \beta'), \qquad m'k' = 3\alpha'\beta'$$

Teorema noastră revine la a demonstră că e imposibil ca $|m|$ și $|k|$ să fie amândoi superiori lui $|\alpha|$, adică ca m' și k' să fie situați în cercul de centru 0 și de rază $|\alpha'|$.

Fie o argumentul lui α' şi θ argumentul lui β' cu $\theta < \pi$. Această presupunere nu restrânge generalitatea, căci se reduce la o rotaţie a axelor, urmată de o simetrie în cazul cel mai general.

A doua relaţie (1) dă:

$$\arg m' + \arg k' = \arg \alpha' + \arg \beta' = \theta$$

Deci m' şi k' sunt situaţi pe vectori simetrici faţă de vectorul OV de pantă $\frac{1}{2}\theta$, adică $\sphericalangle m'OV = \sphericalangle VOk'$. Să presupunem, prin absurd că m' şi k' sunt interiori cercului de centru O şi de rază $|\alpha'|$. Prima relaţie (1) cere ca afixul sumei $m' + k'$ să fie egal cu afixul lui $2(\alpha' + \beta')$. Să însemnăm cu P punctul $2|\alpha'|$ şi fie V punctul de intersecţie al vectorului OV cu vectorul de origină $2|\alpha'|$ şi de pantă θ. E evident că suma $2\alpha' + 2\beta'$ se găseşte pe PV, căci $\arg \alpha'$ e o şi $\arg \beta'$ e θ. Deci punctul $m' + k'$, trebuie să se afle pe PV. Insă, dacă $|m'| < |\alpha'|$ şi $|k'| < |\alpha'|$, punctul $m' + k'$ e situat într'un romb cu un vârf în O, cu diagonala pe OV (din cauza unghiurilor egale $m'OV$ şi $k'OV$) şi cu laturile egale cu $|\alpha'|$. Maximul posibil al acestei diagonale e $2|\alpha'|$.

Triunghiul OPV e isoscel, căci unghiul din O e $\frac{1}{2}\theta$ şi unghiul exterior din P e θ. Ca atare $OP = PV = 2|\alpha'|$. Pentru ca PV să taie rombul care conţine pe $m' + k'$, trebuie deci ca OV să fie inferior lui OP, adică inferior lui $2|\alpha'|$. Aceasta atrage imediat $\theta > 120^0$. Deci, dacă $\theta < 120^0$ şi $|m'| < |\alpha'|$, $|k'| < |\alpha'|$, punctul $m' + k'$ nu poate fi situat pe PV, adică ajungem la o absurditate.

Rămâne de studiat cazul $\theta > 120^0$. In acest caz e evident că toate romburile posibile, cu diagonale pe OV, cu un vârf în O şi cu laturile $|\alpha'|$ sunt exterioare cercului de centru P şi de rază $|\alpha'|$. Cu alte cuvinte, dacă afixul sumei $m' + k'$ ar puteà fi vectorul PV, avem în orice caz $2|\beta'| > |\alpha'|$.

Dar $m'k' = 3\alpha'\beta'$ şi atunci

$$|m'k'| > \frac{3}{2}|\alpha'|^2$$

ceeace arată că e imposibil ca $|m'|$ şi $|k'|$ să fie amândouă inferioare lui $|\alpha'|$. Avem deci neapărat, cel puţin $|m'| > |\alpha'|$ sau $|m| < |\alpha|$. Teorema e demonstraiă.

2) *Fie o ecuaţie de gradul al treilea cu rădăcinile* o, α, β *şi fie* m, k *rădăcinile ecuaţiei derivate. Pentru fixarea ideilor,*

se presupune $|\alpha| < |\beta|$ *şi* $|m| < |k|$. *Dacă* $|\beta| > 2|\alpha|$ *avem*:

$$|m| < |\alpha| < |k| < |\beta|.$$

Reluăm notaţiile dela numărul 1. Am văzut că avem, cel puţin $|m'| > |\alpha'|$. Să presupunem acum prin absurd, că şi $|k'| > |\alpha'|$. In acest caz, valoarea absolută a ordonatei lui $(m' + k')$ e *superioară* unei expresii de forma:

$$|\alpha'| . |\sin(\tfrac{1}{2}\theta - \varphi) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta + \varphi)| = 2|\alpha'| \sin\tfrac{1}{2}\theta \cos\varphi$$

unde φ e unghiul cu care se înclină laturile rombului pe diagonala OV. Cum, în baza teoremei lui LUCAS, m şi k trebuie să se afle în interiorul triunghiului $o\alpha\beta$, avem $\varphi \leqslant \frac{1}{2}\theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Pe de altă parte, valoarea absolută a ordonatei câtimei $2(\alpha' + \beta')$ e $2|\beta'| . |\sin\theta|$. Dar, prin enunţ avem $|\beta| \geqslant 2|\alpha|$. Ca atare:

$$2|\alpha' + \beta'| < |\alpha'| . |\sin\theta| = 2|\alpha'| \sin\tfrac{1}{2}\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Cum $\varphi \leqslant \frac{1}{2}\theta$, avem $\cos\varphi \geqslant \cos\frac{1}{2}\theta$ şi astfel:

$$2|\alpha'| \sin\tfrac{1}{2}\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta \leqslant 2|\alpha'| \sin\tfrac{1}{2}\theta \cos\varphi$$

sau:

$$|2(\alpha' + \beta')| < |m' + k'|.$$

Această inegalitate e în contrazicere cu prima relaţie (1).

Deci presupunerea noastră a fost absurdă. Prin urmare, trebuie să avem neapărat $|k'| < |\alpha'|$, adică $|k| > |\alpha|$ şi deci:

$$|m| < |\alpha| < |k| < |\beta|$$

Teorema e demonstrată.

PETRE SERGESCU.

INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE.

In cele ce urmează voi stabili câteva inegalităţi între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare şi între diferitele elemente ale sale. Am căutat cât mai mult să evit folosirea formulelor sau relaţiilor ştiute sau stabilite mai înainte.

Pornind dela o teoremă de geometrie elementară, că: *„o linie dreaptă este mai mică decât orice linie frântă care are aceleaşi extremităţi“*, se pot stabili inegalităţi interesante.

Fie ABC un triunghi oarecare; AA_1, BB_1, CC_1 înălțimile sale, H ortocentrul; AA', BB', CC' bisectoarele și I centrul cercului înscris.

1°. Să considerăm triunghiul BIC și să scriem că laturile sale sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse:

$$\frac{BI}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{CI}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{BC}{\sin\left(180^0 - \frac{B+C}{2}\right)}$$

sau:

$$\frac{BI}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{CI}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{BC}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor, avem:

$$(1) \qquad \frac{BI + CI}{\sin\frac{1}{2}B + \sin\frac{1}{2}C} = \frac{BC}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Privind însă pe figură, putem scrie:

$$BI + CI > BC.$$

Având în vedere această inegalitate, relația (1) ne dă:

$$(2) \qquad \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C > \cos\tfrac{1}{2}A.$$

La fel se obțin inegalitățile

$$\sin\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}A > \cos\tfrac{1}{2}B$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B > \cos\tfrac{1}{2}C,$$

care adunate cu (2) ne dau

$$2(\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C) > \cos\tfrac{1}{2}A + \cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}C$$

sau

$$\therefore \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}B + \cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A + \sin\frac{1}{2}B + \sin\frac{1}{2}C} < 2.$$

2°. Fie AA'' bisectoarea exterioară ce pleacă din A.
In triunghiul ABA'' se poate scrie:

$$AA'' < AB + BA''$$

și

$$\frac{AA''}{\sin(180^0 - B)} = \frac{BA''}{\sin(90^0 - \frac{1}{2}A)} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{A+2B}{2} - 90^0\right)}$$

sau:

$$\frac{AA''}{\sin B} = \frac{BA''}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{AB}{-\cos\frac{A+2B}{2}}$$

sau, în fine

$$\therefore \quad \frac{AA''}{\sin B} = \frac{BA'' + AB}{\cos\frac{1}{2}A - \cos\frac{A+2B}{2}}.$$

Ţinând seama de inegalitatea de mai sus, deducem:

$$(3) \quad \therefore \quad \cos\frac{A+2B}{2} < \cos\tfrac{1}{2}A - \sin B.$$

Analog, considerând triunghiul ACA″, obţinem inegalitatea:

$$-\cos\frac{A+2C}{2} < \cos\tfrac{1}{2}A - \sin C.$$

Adunând această inegalitate cu inegalitatea (3) avem:

$$\therefore \quad \cos\frac{A+2B}{2} - \cos\frac{A+2C}{2} < 2\cos\tfrac{1}{2}A - \sin B - \sin C.$$

3°. Din triunghiul ACC_1 scoatem:

$$\frac{CC_1}{\sin A} = \frac{AC_1}{\cos A} = \frac{AC}{1}$$

de unde deducem:

$$\frac{CC_1}{\sin A} = \frac{AC_1 + AC}{\cos A + 1}.$$

Ţinând seama că:

$$CC_1 < AC_1 + AC,$$

avem:

$$(4) \quad \sin A < \cos A + 1,$$

care adunată cu analoagele ei ne dă

$$\therefore \quad \sin A + \sin B + \sin C < 3 + \cos A + \cos B + \cos C.$$

Observare:

Dacă toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite (mai mici de 90°), atunci A_1, B_1, C_1 se găsesc pe laturile BC, CA, AB, iar ortocentrul H în interiorul triunghiului. Dacă însă unul din unghiuri ar fi mai mare de 90°, atunci ortocentrul ar fi în exteriorul ariei

triunghiului. In cazul al doilea, inegalitatea de mai sus nu există.

Dacă împărţim inegalitatea (4) şi analoagele ei, respectiv cu sinA, sinB, sinC şi le adunăm, obţinem:

$$\therefore \quad \cot A + \cot B + \cot C + \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C > 3.$$

Dacă însă împărţim aceleaşi inegalităţi cu cosA, cosB, cosC şi le adunăm avem:

$$\therefore \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 3 + \sec A + \sec B + \sec C.$$

4°. Triunghiul ABA′ ne dă

$$\frac{AA'}{\sin B} = \frac{BA'}{\sin \frac{1}{2}A} = \frac{AB}{\sin \frac{A+2B}{2}}.$$

Din aceste proporţii şi din $AB < AA' + BA'$, deducem:

$$\sin \frac{A+2B}{2} < \sin \tfrac{1}{2}A + \sin B.$$

La fel, considerând triunghiul ACA′, obţinem:

$$\sin \frac{A+2C}{2} < \sin \tfrac{1}{2}A + \sin C.$$

Adunând aceste două inegalităţi, avem:

$$\therefore \quad \sin \frac{A+2B}{2} + \sin \frac{A+2C}{2} < 2 \sin \tfrac{1}{2}A + \sin B + \sin C.$$

5°. Avem:

$$BC < BH + CH$$

însă $BC = 2R \sin A$; $BH = 2R \cos B$; $CH = 2R \cos C$, aşà că avem:

$$\sin A < \cos B + \cos C.$$

Analog:

$$\sin B < \cos A + \cos C \quad ; \quad \sin C < \cos A + \cos B.$$

Adunând obţinem:

$$(5) \quad \therefore \quad \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2.$$

Se ştie că: „*Orice linie frântă convexă este mai mică decât oricare linie, care o înconjoară şi are aceleaşi extremităţi*".

Putem deci scrie:

$$BH + CH < AB + AC;$$

dar $BH = 2R\cos B$, etc... ; $AB = 2R\sin C$, etc...; astfel că inegalitatea precedentă devine:

$$\cos B + \cos C < \sin B + \sin C$$

Această inegalitate adunată cu analoagele ei, ne dă:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} > 1$$

şi comparând această inegalitate cu (5), avem:

$$(6) \qquad \therefore \quad 2 > \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} > 1.$$

Observare.

Inegalitatea (6) subsistă numai pentru cazul când toate unghiurile triunghiului ABC sunt mai mici de 90^0.

6^0. In exemplele date mai sus am stabilit numai inegalităţi între liniile trigonometrice ale unghiurilor triunghiului.

Analog se pot stabili inegalităţi între diferitele elemente ale sale.

Astfel b_a, b_b, b_c fiind bisectoarele interioare, se găseşte:

$$b_a < AB + BA' \quad \text{şi} \quad b_a < AC + CA'$$

sau:

$$2b_a < a + b + c.$$

Analog:

$$2b_b < a + b + c \quad ; \quad 2b_c < a + b + c.$$

Adunând se obţine:

$$b_a + b_b + b_c < \frac{3}{2}(a + b + c), \quad \text{etc...}$$

NICOLAE O. ZAHARIA.
Constanţa.

NOTE MATEMATICE

5. *Curiosités arithmétiques. a)* Il existe un carré de quatre chiffres tel que le nombre formé par ses deux chiffres à droite soit multiple de celui formé par les deux chiffres à gauche,

$$\overline{36}^2 = 1296.$$

Le carrés de six chiffres

$$3\overline{36}^2 = 112896$$

est de même forme relativement aux nombres déterminés par leurs tranches de trois chiffres consécutifs.

Voici ceux de six chiffres dont le nombre formé par les deux chiffres à droite soit multiple de celui des deux chiffres à gauche.

$$3\overline{38}^2 = 114244 \qquad 5\overline{05}^2 = 255025$$
$$3\overline{84}^2 = 147656 \qquad 5\overline{34}^2 = 285156$$
$$4\overline{04}^2 = 163216 \qquad 6\overline{06}^2 = 367236$$
$$4\overline{08}^2 = 166464 \qquad 7\overline{07}^2 = 499849$$
$$4\overline{61}^2 = 212521 \qquad 8\overline{74}^2 = 763876$$
$$4\overline{87}^2 = 237169 \qquad 8\overline{76}^2 = 767376.$$

Les nombres formés des tranches de deux ou trois chiffres à gauche sont des multiples de ceux formés des deux ou trois chiffres à droite dans ces carrés :

$$\overline{49}^2 = 2401 \quad \overline{51}^2 = 2601 \qquad \overline{98}^2 = 9604 \quad \overline{99}^2 = 9801.$$

$$4\overline{98}^2 = 248004 \qquad 7\overline{49}^2 = 561001$$
$$4\overline{99}^2 = 249001 \qquad 7\overline{51}^2 = 564001$$
$$5\overline{01}^2 = 251001 \qquad 7\overline{53}^2 = 567009$$
$$5\overline{02}^2 = 252004 \qquad 9\overline{98}^2 = 996004$$
$$7\overline{47}^2 = 558009 \qquad 9\overline{99}^2 = 998001.$$

b) Ces deux cubes de neuf chiffres sont de forme analogue

$$5\overline{04}^3 = 128024064 \qquad 5\overline{34}^3 = 152273304.$$

c) Les tranches de trois chiffres consécutifs des cubes suivants sont terminées par un même chiffre.

$$\overline{657}^3 = 283593393 \qquad \overline{715}^3 = 365525875$$
$$\overline{707}^3 = 353393243 \qquad \overline{742}^3 = 408518488$$
$$\overline{813}^3 = 537367797.$$

d) Les nombres représentés par les tranches de deux chiffres consécutifs de

$$\overline{663}^2 = 439569$$

forment une progression arithmétique.

e) La relation

$$k(m+n)^2 = k(m^2+2mn+n^2)$$
$$= mn(k-1) + mn(k+1) + k + m^2n^2k$$

conduit à la suivante

$$mn(k-1) + mn = mn(k+1) - mn = kmn = \frac{m^2n^2k}{mn}$$

qui donne la solution de ce curieux petit problème :

Quels sont les nombres N *jouissant de la propriété suivante : On peut décomposer* N *en quatre parties telles que si l'on augmente la première de l'entier* n, *si l'on diminue la seconde de* n, *si l'on multiplie la troisième par* n *et si l'on divise la quatrième par* n, *les quatre résultats obtenus sont des entiers égaux.*

$$N = k(n+1)^2 = n(k-1) + n(k+1) + k + n^2k.$$

V. THÉBAULT.
Le Mans (France).

* 6. *Alexandru Gavra, profesor ardelean de matematici.* Unul din profesorii ardeleni, care se oferiseră să vină la Iaşi pentru învăţământul colegial ce se înfiinţase acolo a fost şi *Alexandru Gavra* din Arad. Iată scrisoarea de recomandaţiune pe care a trimis-o *Samuel Vulcan*, Episcopul Oradiei Mari în Iulie 1832, Mitropolitului *Veniamin Costaki* din Iaşi.

„Preosfinţite şi prea mărite Domnule Mitropolit, mie întru Hristos Frate şi prea cinstită Epitropie a şcoalelor Moldoveneşti.

După ce mi se făcu înştiinţare, cum că spre dobândirea unei catedre profesoralnice, profesorul românesc al şcoalelor de legea Grecească neunită pedagogiceşti dela Arad, domnia lui *Alexandru Gavra*, a aşternut recursul său, am dorit şi eu despre partea mea cu atâta mai bucuros pentru dânsul, la frăţiile noastre a face pas şi a-l recomanda, cu atât mai tare îmi este cunoscută hărnicia lui, întru împlinirea datorinţelor sale profesoralnice, şi râvna lui către prea iubitul neamul nostru românesc.

Recomandaţia aceasta două scopuri are:

a) Ca aceasta prea vrednic profesor să se poată după meritele sale ferici, şi încă spre mai mari prinosuri, care cu vreme pe sama naţiei Româneşti în literatură va să le pună, îndemna;

b) Pentru ca văzând eu cu vreme înflorirea patriei noastre, să pot simţi bucuria aceea, cum că şi eu ca un adevărat părinte, barem din departe, şi în cât-va m'am învrednicit a mă face mădulariu, conlucrătoriu al fericirei cei vremelnice a pruncilor voştri.

Merite, care pre mine mă îmboldesc tocmai pre acest, şi nu pre alt bărbat a vă recomonda, sunt aceste:

1. Că cunoscând-i năravurile, aplecăciunile, şi cugetările cele drepte încă din pruncie, fiind din Oradia Mare de naştere, ştiu cu bună seamă, că nu mă va păţi ruşine după purtarea lui.

2. Mai sus numitul profesor, gimnaziul, filosofia, încă şi iusul cu eminenţie le-a săvârşit, precum chiar se arată din atestaturile sale la Moldavia trimise.

3. In curgerea legilor pe lângă Varmegea Bihăriei, care cât timp şi în praxă încă s'au deprins şi s'au procopsit.

4. Cu toată sirguinţa pe lângă fişcali au săvârşit şi praxa iuridică cu cel mai mare sporiu.

5. In mai multe limbi scrie, vorbeşte şi conţipează.

6. Dintre 18 concurenţi el singur s'a judecat a fi vrednic de catedra pedagogicească, după ce au pus înaintea Deputaţiei rigorosum examen din toate învăţăturile, care se propun în Academiile Ungureşti, încă şi din alte studii, care sunt de lipsă la creştere. Pentru aceea în anul 1821 şi s'au făcut profesor ordinar.

7. Şi aşa 11 ani încoace propune în limba românească aceste învăţături, adecă: geografia, *matimatica* şi fizica. *aritmetica cea fără ţifre şi cea cu ţifre*, şi de oare căţi-va ani în coace, mai propune şi gramatica românească.

8. Aceste învăţături cu aşa mare sporiu le tălmăceşte auzitorilor săi, în cât toţi se miră de mergerea lui înainte.

9. Râvna lui spre învăţătura neamului Românesc este fără hotar, pentru că în ceasurile acele ce sunt afară de shoală, tot tălmăceşte pre cărţi în limba românească, cât până acum au scos 12 cărţi, care şi mie mi le-au dat spre cetire.

10. Altora încă au stat întru ajutoriu la tipărirea cărţilor, şi până acuma încă să sârguieşte a fi întru ajutoriu.

11. Afară de aceasta, lung timp au purtat şi sarcina autoratului pre lângă concesurile literaricești, în limba românească.

12. Năravul lui, tuturor este plăcut şi de toţi lăudat.

Aceste sunt acelea despre care şi eu sunt mărturie, şi care şi pe mine mă îndeamă ca acestui vrednic de laudă bărbat în tot modul, să-i stau întru ajutor spre fericire vieţei sale, cea tuturor Românilor prea folositoare. Drept aceia, dară iarăşi preînnoiesc cererea, şi mă rog de frăţia ta, şi de cinstita Epitropia şcoalelor, ca ceruta prin el catedră a i-o încredinţa şi rezolvi să vă îndurați, că de va intra bărbatul acesta în patria Domnielor voastre, să ştiţi că cele mai frumoase roduri vor urma pre fii voştri după ostenelile lui, şi apoi eu nu voiu înceta a înălţa către Tatăl ceresc, cea mai umilită mulţămire, pentru că ascultându-mi cererea, mi se dădu prilej iarăşi a împlini o dorinţă mare, în treaba rădicării omenirei din jelnica ceaţă a neştiinţei. Care neastâmpărată dorire a mea şi de Domnul Dumnezeu cel ce stăpâneşte ceriul şi pământul, şi carele pe toate popoarele într'un chip le-au hotărât, şi gătit spre fericire, ca cât mai în grabă să se împlinească întru laudă şi mergerea înainte a neamului nostru Românesc.

Iară vouă, de la acel prea bun Taică al nostru, îndelungată sănătate şi pre pământul vostru pace, bine cuvântare Dumnezeiască, şi întru oameni bună voire poftindu-vă, cu cea mai cuviincioasă cinstire, rămân în Oradia Mare.

In Iulie 1832.

Al preaosfinţiei şi al cinstitei Epitropii,
De binevoitoriu frate *Samuel Vulcan*, Episcop Orădiei Mari",

După cât se pare, *Alexandru Gavra* nu s'a dus la laşi. Motivele ar fi de cercetat.

I. I.

* 7. *Filosofia şi erorile ştiinţifice*[1]). In *„Filosofia stilului"* de L. BLAGA, găsim la pag. 79:

„Iraţionalul intră doar aşà de des chiar şi în ipotezele şi teoriile acceptate de ştiinţă (vezi H. HAIHINGER, Philosophie des Abs. Obs. Leipzig 1918). Matematica e plină de astfel de formule alogice. In calculul infinitezimal, bună oară, infinitul mic, luat, când egal cu zero, când egal cu ceva, cu o mărime care adaosă de nenumărate ori la sine însuşi dă infinitul mare. Aceste construcţii care desfid logica sunt socotite chiar între cele mai îndrăsneţe fapte ale ştiinţei".

Nu ştim dacă exemplul acesta a fost ales de D-l BLAGA, sau se datoreşte autorului citat de D-sa; în orice caz alegerea a fost nefericită. D-sa spune că infinitul mic e luat când egal cu zero,

1) Extras din o lucrare, rămasă în munuscris neterminată, purtând titlul de aci, şi în care se dovedeşte necesitatea culturii ştiinţifice pentru filosofii de azi.

I. I.

când egal cu ceva. De ce o fi întrebuinţat această expunere care dă impresia că la baza calculului infinitezimal reside iraţionalul şi arbitrarul, nu ştim, dar credem că ar fi fost cu mult mai greu să afirme că iraţionalul e frecuent în matematică, dacă ar fi dat definiţia obişnuită, că un număr variabil x este un infinit mic atunci când are ca limită pe zero (NIEWENGLOWSKI, tome II). De ce ar fi fost mai greu? Pentru că se arată că x e un *număr variabil* şi atunci ar fi trebuit să susţină iraţionalitatea variabilelor în genere, ceace erea cu adevărat iraţional.

Cum? Faptul că matematica consideră aşà zisele variabile este ilogic şi iraţional?

In primul rând *variabilele* nu sunt nişte abstracţiuni; ele sunt scoase din experienţă; când o câtime ia diferite valori este o variabilă. In al doilea rând mărturisim că nu vedem ce lege logică este în contrazicere cu existenţa unei câtimi care variază.

Revenind la calculul infinitezimal repetăm că infinitul mic este când egal cu zero, când egal cu ceva pentru că este un număr variabil care are ca limită pe zero.

Să mai adăogăm că nu vedem pentru ce faptul că o câtime adaosă de nenumărate ori la sine însuşi dă infinitul mare, desfide orice logică?

Ar fi foarte interesant ca D-l BLAGA să ne deà aceste afirmaţii însoţite de explicaţii mai ample. Tot deodată am dori să cunoaştem cel puţin câteva din formulele alogice (sic) de care matematica e plină. Subliniem însă că nu vom admite ca ilogice decât acele formule sau adevăruri care vin în contrazicere cu vre-o lege fundamentală a logicei sau au fost stabilite printr'un raţionament greşit din punct de vedere al logicei formale.

In ceace priveşte iraţionalul, D-l BLAGA are oarecare dreptate; matematica are un capitol despre numerele iraţionale sau incomensurabile! Cred însă că ar fi necesară o precizare a înţelesului cuvântului iraţional, pentru că aşà zisele numere iraţionale sunt stabilite fără încălcarea logicii de către raţiune.

Incheiem cu aceasta regretând că preoţii filosofiei masacrează ştiinţa pe altarele lor.

Jertfa e dureroasă şi inutilă!

† N. C. SEGARCEANU.
25/VIII 1925.

*8. *Asupra ortopolului şi izopolului.* In *Mathesis* 1927, pag. 24, FRANCIS D. MURNAGHAN, dela John Hopkins University, într'un lung articol, demonstrează, cu ajutorul coordonatelor complexe sau izotrope, următoarea proprietate:

„*Se consideră două triunghiuri* ABC, A'B'C' *înscrise în acelaşi cerc* O. *Dacă dreptele lui* SIMSON *ale vârfurilor lui* A'B'C' *faţă de* ABC *sunt concurente, atunci şi dreptele lui* SIMSON *ale vârfurilor lui* ABC *faţă de* A'B'C' *sunt de asemenea concurente*".

De altfel această proprietate nu este nouă. Ea a fost găsită acum 14 ani de TRAIAN LALESCU, care i-a dat şi o elegantă soluţie geometrică în Nota 19 din *Gazeta Matematică* anul XX, pag. 213.

In cele ce urmează voiesc să dau acestei teoreme o nouă soluţie geometrică, care va aveà darul de a ne sugerà şi o generalizare a chestiunii.

Se ştie că ortopolul unei drepte este punctul comun al cercurilor ortopolare găsite şi studiate de D-l M. FOCŞĂNEANU în mai multe articole (*Curierul matematic*, Anul I, pag. 161; Anul II, pag. 49 şi *Gazeta Matematică*, Anul XXXI, pag. 487). Fie (Aa), (Ab), (Ac) cercurile ortopolare ale dreptei B'C' faţă de triunghiul ABC; fie (Ba), (Bb), (Bc) cercurile ortopolare ale laturii C'A' şi (Ca), (Cb), (Cc) cercurile ortopolare ale laturii A'B' faţă de ABC. Dacă dreptele lui SIMSON ale vârfurilor lui A'B'C' faţă de ABC sunt concurente în punctul V, toate cercurile semnalate mai sus, în număr de nouă, trec prin V. Acele cercuri sunt respectiv câte trei ortopolare laturilor BC, CA, AB faţă de A'B'C'. De aci reese proprietatea enunţată.

Ţinând seama de prima soluţie dată de D-l M. FOCŞĂNEANU teoremei cercurilor ortopolare în *Curierul Matematic*, Anul I, pag. 165, cum şi de faptul că izopolul de unghiu α al unei drepte faţă de un triunghiu este intersecţia dreptelor SIMSON de unghiu $(\pi - \alpha)$ ale punctelor unde dreapta întâlneşte cercul circumscris (CL. SERVAIS, *Mathesis* 1926, pag. 350), se deduce cu uşurinţă că analoage cu cercurile ortopolare avem şi cercuri izopolare. De exemplu, un cerc izopolar al dreptei B'C' faţă de ABC se obţine în felul următor. Se proiectează vârfurile B, C sub unghiul α pe B'C' în B_1 şi C_1, şi punctele B', C' sub unghiul $(\pi - \alpha)$ pe BC în B'_1 şi C'_1. Cercul $B_1C_1B'_1C'_1$ trec prin izopolul de unghiu α al dreptei BC

față de A'B'C'. Repetând raționamentul făcut mai sus deducem teorema:

„Se consideră două triunghiuri ABC, A'B'C' înscrise în același cerc. Dacă dreptele lui SIMSON de unghiu α ale vârfurilor lui A'B'C' sunt concurente în un punct φ, atunci și dreptele lui SIMSON de unghiu $(\pi-\alpha)$ ale vârfurilor lui ABC față de A'B'C' sunt concurente în același punct φ.

N. BOTEA.

* 9. *Asupra notei 22* din *Gazeta Matematică*, Vol. XV[1]).

In această notă D-l V. CRISTESCU demonstrează imposibilitatea relației:

$$(1) \qquad a^2+b^2+c^2=h_a^2+h_b^2+h_c^2,$$

dovedind că:

$$(2) \qquad h_a^2+h_b^2+h_c^2<a^2+b^2+c^2.$$

Imposibilitatea lui (1) iese și din rezolvarea problemei 1540, propusă de D-l V. CRISTESCU în care se cereà minimul lui

$$E=a^2+b^2+c^2-h_a^2-h_b^2-h_c^2,$$

căci minimul lui E fiind $p^2/3>0$;

$$a^2+b^2+c^2\neq h_a^2+h_b^2+h_c^2$$

ci:

$$a^2+b^2+c^2>h_a^2+h_b^2+h_c^2$$

Inegalitatea (2) ese și din relația

$$E=\frac{a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a^2-b^2}{c}\right)^2+\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2+\left(\frac{c^2-a^2}{b}\right)^2}{4},$$

găsită de D-l V. CRISTESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XX, care fiind mai mare decât zero atrage după sine (2).

† ALEX. ROȘU.

10. *Asupra Exercițiului 84 din G. M. vol. XXXIV pag. 329.* Acest exercițiu are de scop stabilirea relației:

1) Găsită printre hârtiile lui V. CRISTESCU.

I. I.

(1) $$8R^3 \sin A \sin B \sin C = abc$$

cu ajutorul formulelor

$$abc = 4Rs \quad ; \quad s = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \quad \text{şi} \quad a = 2R \sin A.$$

Relaţia (1) nu cere cunoştinţa acestor din urmă trei relaţii, ci numai a ultimei şi a analoagelor sale. Inmulţind aceste relaţii între ele căpătăm relaţia (1).

Cu ajutorul acestei observări relaţia (1) poate fi generalizată astfel:

$$2^{\alpha+\beta+\gamma} R^{\alpha+\beta+\gamma} \sin^{\alpha} A \sin^{\beta} B \sin^{\gamma} C = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}.$$

GH. TH. GHEORGHIU-GLADIŞ.

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXXV. No. 4 Iulie—August 1929. New-York. Adunarea din Martie dela New-York, de A. DRESDEN, Adunarea din Martie dela Chicago, de M. N. INGRAHAM, Uzul fracţiilor continui în reţelele electrice, de T. C. FRY. O îndreptare de E. T. BELL. Aproximaţia funcţiunilor harmonice prin polinomiale armonice şi prin funcţiuni armonice raţionale, de T. L. WALSH. O serie inductibilă de postulate pentru logica propoziţiunilor, de B. A. BERNSTEIN. Determinarea unor reţele plane caracterizate prin unele proprietăţi ale transformatelor lor *Laplace*, de C. T. SULLIVAN. Asupra unor locuri de linii incidente cu curbe şi suprafeţe în spaţiul cu patru dimensiuni, de R. C. WONG. Grupe care admit automorfisme în care exact trei sferturi de operatori corespund inverselor lor, de G. A. MILLER. Rolul direcţiunii în variaţiunile unei integrale definite în spaţiu, de L. BRAND. Efectele orcnodului asupra formelor covariante ale curbelor cuartice plane raţionale, de T. H. NEELLEY. *Townsend* asupra variabilelor reale, de W. A. WILSON. A doua ediţie a combinatoricei lui NETTO, de T. H. GRONWALL.

Boletin matematico. Anul II. No. 7. Iulie 1929. Buenos-Aires. Inginerul Doctor CARLOS M. MORALES, necrolog, de C. C. DASSEN. Profesorul EMILE BOREL. Asupra neegalităţilor lui SCHWARZ şi THEBYCHEFF în teoria integralelor definite, de J. SHOHAT.

JOSE ÁROMBUBO. *Determinaciones de Tiempo y Latitud con el azimut Gautier y el telescopio zenital Wandschaff del observatorio astronominco de La Plata.* (Publicaţie a Facultăţii Fizico matematice a Universităţii din La Plata). La Plata 1929.

N. Ciorănesco. *La méthode de* Riemann *pour les systhèmes à èquations du second ordre,* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* din Paris. Iunie 1929) Paris.

N. Ciorănesco. *Le problème de* Dirichlet *pour les systhèmes d'èquations aux derivées partielles du second ordre.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* din Paris. Ianuarie 1929). Paris.

N. Ciorănesco. *Le problème de* Dirichlet *pour les systhèmes d'èquations du tipe elliptique et l'extension d'une relation fonctionelle de* M. Hadamard. (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences din Paris,* Ianuarie 1929). Paris.

N. Ciorănesco. *Le problème de* Dirichlet *pour les sisthèmes d'équations aux derivées partielles du second ordre.* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques). Paris 1929.

Gr. C. Moisil. *La mécanique analytique des systèmes continus.* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Bucarest pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques). Paris. Gauthier-Villars et C-ie. Editeurs. Paris. 1929.

Căpitan Ion Linteș. *Curs de aerodinamică.* In editura Școalelor Militare pregătitoare și speciale ale Aerodinamicei. București 1929. Tipografia Școalelor Militare Aeronautice. Cotroceni.

CERERI.

182. A rezolvat cineva dintre corespondenții prezentați la concursul din anul acesta problema dată la trigonometrie, clasa VII, proba teoretică?

Aurelian I. Stan.

Răspuns. Nu. Nu rezultă însă că nu se puteà face, cum a afirmat un corespondent, a cărui soluție am reprodus-o în *Suplimentul* No. 11 din anul trecut.

Dacă se aplică triunghiurilor ABA_1, ACA_2 proprietățile bisectoarei, se scot $AA_1 = bv/w$; $AA_2 = cv/u$. In triunghiurile ABA_1, AA_1A_2, A_1A_2C se exprimă u^2, v^2, w^2 în funcție de celelalte laturi și $\cos\frac{1}{3}A$; se elimină $\cos\frac{1}{3}A$ și se rezolvă cele două ecuații rămase. Se găsește:

$$b^2 = \frac{uw^2(v+w)}{uw - v^2}, \qquad c^2 = \frac{u^2w(v+u)}{uw - v^2}.$$

Apoi: $a = u + v + w$.

Se cunosc deci cele trei laturi și se pot găsi unghiurile.

Autorul alesese datele numerice așa că triunghiul eșià dreptunghic, iar la unul din unghiuri se cunoștea expresia unei linii trigonometrice, așà că se puteau găsi unghiurile fără tabele. Nu știu dacă s'au reprodus exact datele numerice.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2879. *Să se găsiască pătratele perfecte de patru cifre în care numărul format din primele două cifre să fie egal cu de patru ori prima cifră a rădăcinii lor pătrate; şi altele în care numărul format din ultimele două cifre să fie egal cu de cinci ori ultima cifră a rădăcinii lor pătrate.*

C. ŞTEFĂNESCU.

Pătratele căutate fiind numere de patru cifre, rădăcina lor pătrată va fi cuprinsă între:

(1) $$32 \leqslant \alpha\beta \leqslant 99$$

I. Conform enunţului nu vom puteà aveà decât:

(2) $$12\,cd = (3\beta)^2 \quad \text{şi} \quad 16\,cd = (4\beta)^2$$

căci: $$20\,cd < 50^2$$

Extrăgând rădăcina pătrată a acestor două numere (2) şi impunând condiţia ca resturile să fie zero, avem soluţiunile primei părţi a problemei:

$$1225 = 35^2 \; ; \quad 1296 = 36^2 \; ; \quad 1600 = 40^2 \; ; \quad 1681 = 41^2$$

II. Ţinând seama de ultimele două cifre în care se termină pătratele perfecte, conform enunţului numerele căutate vor fi de forma:

(3) $$ab\,00 \quad \text{şi} \quad ab\,25.$$

Numerele căutate fiind de patru cifre (1) vom aveà pentru $(\alpha\beta)$:

35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95

care ridicate la pătrat dau soluţiunile părţii a doua a problemei:

1225 ; *1600* ; *2025* ; *2500* ; *3025* ; *3600* ; *4225* ; *4900* ; *5625* ;

6400 ; *7225* ; *8100* ; *9025.*

Observări.

1. Au rezolvat problema pe căi mai lungi d-nii: GH. M. CĂLIN, U. M. FLORESCU, B. V. GATAIANŢU, C. I. ISTINIE-BREZUICA, I. MURĂROIU şi A. A ROŞU.

2. D-nii A. Bolgar, I. Gh. Popa şi Har. P. Ionescu n'au dat toate soluţiunile părţii a doua a problemei.

3. D-l Har. P. Ionescu studiază necomplet cazul când numărul format de ultimele două cifre, ale pătratelor perfecte de patru cifre, ar fi un multiplu al ultimei cifre a rădăcinii pătrate.

Tr. A. Dordea.

PROBLEMA 3305. *Cunoscându-se punctele care împart laturile unui triunghiu dat* ABC *în aceiaşi sens şi în acelaşi raport* k_1, *să se găsească numai cu compasul, punctele care împart laturile în acelaşi sens şi acelaşi rapart* k^{2n} *şi* $1 : k^{2n}$ (n *întreg şi positiv*).

I. C. Vasiliu şi C. I. Ciorănescu.

Soluţie dată de P. Ionescu (student Bucureşti).

In *Problèmes de géometrie* par G. Ritt se construeşte numai cu compasul prin trasarea a 18 arce de cerc, intersecţia a 2 drepte date prin câte 2 puncte.

Se deduce că se poate construi numai cu compasul mijlocul unui segment de dreaptă. Pentru aceasta e destul a descrie 2 cer-

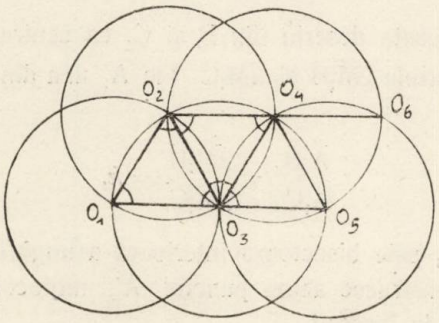


Fig. 1.

curi de raze egale, cu centrele în extremităţile segmentului dat. Mijlocul căutat se află la intersecţia segmentului dat, cu dreapta ce uneşte intersecţiile celor 2 cercuri.

Să arăt că cunoscând distanţa a între 2 puncte, se poate găsi numai cu compasul lungimea al (l întreg şi pozitiv).

Pentru aceasta descriu cercul O_1 cu raza a. Din un punct O_2 de pe O_1 descriu cercul O_2 cu raza a care taie pe O_1 în O_3. Din O_3 ca centru descriu un cerc de rază a care taie pe O_2 în O_4. Construesc la fel punctele O_5 O_6,... Punctele O_1, O_3, O_5,.. sau O_2, O_4, O_6,.. sunt colineare, iar:

$$O_1O_3 = O_3O_5 = \ldots = O_2O_4 = O_4O_6 = \ldots$$

In adevăr triunghiurile $O_1O_3O_2$, $O_2O_3O_4$, $O_3O_4O_5$,.... fiind echilaterale avem:

$$\sphericalangle O_1O_3O_2 + \sphericalangle O_2O_3O_4 + \sphericalangle O_4O_3O_5 = \pi,$$

deci O_1, O_3, O_5 sunt colineare. La fel se arată că O_2, O_4, O_6 sunt colineare. Se construesc în acest fel $2n$ cercuri aşa ca O_1O_{2n-1} sau O_2O_{2n} să fie egal cu al.

Trec acum la problema 3305. Fie punctul M_1 pe latura BC a triunghiului ABC aşa ca:

$$\frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}} = k.$$

Imi propun să găsesc pe aceeaşi latură punctul M_2, aşa fel în cât

$$\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}} = k^2.$$

Pentru aceasta descriu din B şi C, ca centre, câte un cerc respectiv cu razele $2\overline{M_1B}$ şi $2\overline{M_1C}$. Fie A_1 una din intersecţiile lor. Avem:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{2\overline{M_1B}}{2\overline{M_1C}} = k.$$

Deci A_1M_1 este bisectoara interioară a unghiului A_1 în triunghiul BA_1C. Construesc acum punctul A', mijlocul lui BC, după metoda expusă la început.

Imi propun să construesc numai cu compasul uu cerc O tangent la A_1A' în A' şi cu centrul pe A_1M_1. Fie N mijlocul lui A_1O. De oarece $OA' \perp A_1A'$, urmează că $\overline{A_1N} = \overline{NA'}$ şi că N se află pe perpediculara ridicată în mijlocul lui A_1A'. Pentru găsirea lui N, descriu deci 2 cercuri egale cu centrele în A_1 şi A' şi procedând ca în geometria lui Ritt caut apoi intersecţia lui A_1M_1 cu dreata

ce unește intersecțiile celor 2 cercuri. Odată determinat N_1 descriu un cerc cu centrul în N și cu raza NA_1. El va tăià cercul descris din A' ca centru cu $A'O = 2ND$ ca rază, în O. (D este mijlocul lui A_1A', găsit ca în RITT). Din O ca centru cu OA' ca rază descriu un arc care taie cercul ABC în P. Fie apoi M_2 intersecția lui A_1P

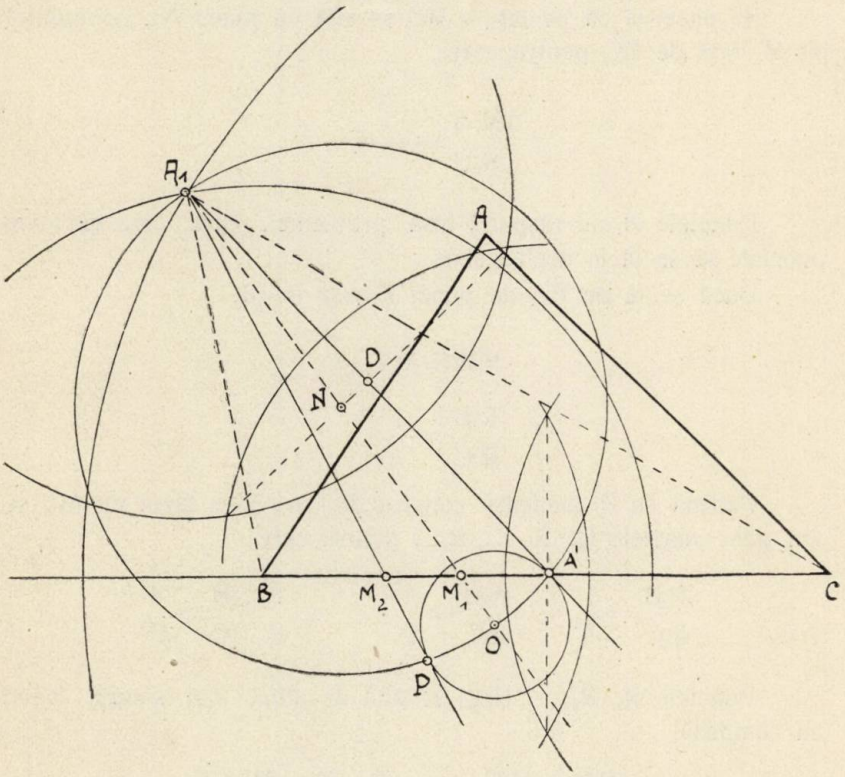


Fig. 2.

cu BC. Dreapta A_1P este simetrica lui A_1A' față de A_1M_1, deci este simediană în triunghiul BA_1C. După o proprietate cunoscută:

$$\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = k^2.$$

Plecând dela M_2, pe aceeași cale se va găsì un punct M_3 așà în cât

$$\frac{\overline{M_3B}}{\overline{M_3C}} = (k^2)^2 = k^{2^2}$$

şi din aproape în aproape se va deduce punctul M_{n+1} din M_n aşà în cât

$$\frac{\overline{M_{n+1}B}}{\overline{M_{n+1}C}} = k^{2^n}.$$

La fel se găsesc puncte M pe celelalte laturi.

Se observă că pe latura BC se află un punct N_1, conjugatul lui M_1 faţă de BC pentru care

$$\frac{\overline{N_1B}}{\overline{N_1C}} = -k.$$

Punctele N_i nu răspund însă problemei, care cere ca toate punctele să se ià în acelaş sens.

Dacă se ià pe BC un punct R_1 aşà în cât

$$\overline{R_1B} = \overline{M_1C}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{R_1B}}{\overline{R_1C}} = \frac{1}{k}.$$

Făcând cu R_1 aceleaşi construcţii care s'au făcut cu M_1, se vor găsi punctele $R_2, R_3, \ldots R_{n+1}$ pentru care

$$\frac{\overline{R_2B}}{\overline{R_2C}} = \frac{1}{k^2} \; ; \quad \frac{\overline{R_3B}}{\overline{R_3C}} = \frac{1}{k^{2^2}} \; ; \quad \ldots \frac{\overline{R_{n+1}B}}{\overline{R_{n+1}C}} = \frac{1}{k^{2^n}}.$$

Punctele $R_1, R_2, \ldots R_{n+1}$ se află de altfel mai simplu luând cu compasul

$$\overline{R_2B} = \overline{M_2C} \; , \ldots , \; \overline{R_{n+1}B} = \overline{M_{n+1}C}.$$

Notă. D-l D. Nestor a anunţat că problema se poate rezolvà cu ajutorul notei publicată în *Curierul Matematic*, An. I, pag. 104, unde D-l N. Botea demonstrează că dacă P are coordonatele $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ atunci M va aveà coordonatele $(\alpha_0^2, \beta_0^2, \gamma_0^2)$ unde A', B', C' fiind picioarele cevienelor lui P iar A", B", C" conjugatele lor armonice faţă de vârfurile triunghiului, M este intersecţia cercurilor AA'A", BB'B", CC'C".

PROBLEMA 3449. *Fie* a, b, c *laturile unui triunghiu oarecare,* S *aria triunghiului;* a *fiind latura cea mai mică şi* h_a *înălţimea corespunzătoare laturei* a, *să se demonstreze inegalităţile:*

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2}>4h_a^2$$

$$a^2+b^2+c^2-\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2}<4h_a^2.$$

Se cere o demonstraţie directă.

† V. Cristescu.

I. *Soluţie* dată de d-nii: P. I. Ghişoiu, A. Roşculeţ şi Gh. I. Balaban.

In condiţiile $a<b<c$, † V. Cristescu a demonstrat pe cale directă în *Gazeta Matematică* Vol. XXXI pag. 412 că h_a^2 este cuprins între rădăcinile ecuaţiei

$$x^4-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\,x^2+3S^2=0.$$

Ori acele rădăcini sunt tocmai membrii întâi ai neegalităţilor date împărţiţi cu 4. Deci problema e demonstrată.

II. *Soluţia* dată de D-l F. S. Goldstein (Şc. Politecnică, Bucureşti).

Se ştie că

$$(1)\qquad 16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=2\Sigma a^2b^2-\Sigma a^4$$

aşă că putem scrie

$$(2)\qquad (a^2+b^2+c^2)^2-48S^2=\Sigma a^4+2\Sigma a^2b^2-6\Sigma a^2b^2$$
$$+3\Sigma a^4=4\,[\Sigma a^4-\Sigma a^2b^2].$$

Insă avem neegalitatea evidentă

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2>0$$

$$\therefore\qquad 2\,(\Sigma a^4-\Sigma a^2b^2)>0.$$

Ţinând seamă de aceasta, (2) ne dă

$$(3)\qquad [\Sigma a^2]^2-48S^2>0.$$

Fie m_a mediana vârfului A. De oarece $a < b < c$ rezultă $h_a < m_a$ şi deci $4h_a^2 < 4m_a^2$. Dar avem

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\therefore \quad 4h_a^2 < 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\therefore \quad 4h_a^2 + 3a^2 < 2\Sigma a^2$$

$$\therefore \quad 4h_a^2 - 2\Sigma a^2 < -3a^2$$

sau înmulţind cu $4h_a^2$ găsim

$$(4h_a^2)^2 - 8h_a^2 \Sigma a^2 < -12a^2 h_a^2 = -48S^2.$$

De unde, ţinând seamă de (1).

$$(4h_a^2)^2 - 8h_a^2 \Sigma a^2 + (\Sigma a^2)^2 < (\Sigma a^2)^2 - 48S^2$$

$$\therefore \quad (4h_a^2 - \Sigma a^2)^2 < (\Sigma a^2)^2 - 48S^2$$

Membrul al doilea fiind pozitiv conform cu (2), urmează că această neegalitate conduce la:

$$-\sqrt{(\Sigma a^2)^2 - 48S^2} < 4h_a^2 - \Sigma a^2 < \sqrt{(\Sigma a^2) - 48S^2}$$

adică neegalităţile din enunţ puse sub altă formă.

PROBLEMA 3611. *Dacă* a *şi* b *sunt una din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, în ce caz* a0b *şi* b0a *reprezintă acelaşi număr în două sisteme de numeraţiune diferite?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l G. PAMFIL (Cluj).

Fie x baza sistemului în care e scris $a0b$ şi y a sistemului în care e scris $b0a$. Fie $a < b$ şi deci $x > y$. Avem dar $x < y < b < a$. Ecuaţia problemei este:

$$ax^2 + 0 \cdot x + b = by^2 + 0 \cdot y + a,$$

de unde scoatem:

$$by^2 - ax^2 = b - a.$$

Aci avem o ecuaţie nedeterminată de gradul II în numere întregi. Ea se poate rezolvà după metoda dată de LAGRANGE. Dăm

lui a şi b valori mai mici ca 10 cu condiţia $b > a$ şi rezolvăm ecuaţiile obţinute după acea metodă. Dacă ne limităm la baze de numeraţiune de cel mult 20, se găsesc soluţiile următoare:

a	1,	1,	11,	2,	2,	2,	2,	3,	3,	3,	4,	4,	5,	6,	7.
b	2,	3,	6,	3,	4,	5,	6,	4,	5,	9,	5,	6,	7,	8,	9.
x	7,	19,	17,	11,	7,	11,	19,	15,	19,	19,	19,	11,	13,	15,	17.
y	5,	11,	7,	9,	5,	7,	11,	13,	7,	11,	17,	9,	11,	13,	15.

Soluţie dată de D-l I. MURĂROIU (Braşov).

Facem substituţia:

$$x = bz + t, \qquad y = az + t.$$

Ecuaţia, dată la prima soluţie, se reduce la:

$$t^2 - abz^2 = 1,$$

care e o ecuaţie a lui PELL ce se ştie rezolvà. Dacă t_1 şi z_1 sunt soluţiile ei minime, soluţiunile generale sunt:

$$t = \tfrac{1}{2}\left[(t_1 + \sqrt{abz_1})^n + (t_1 - \sqrt{abz_1})^n\right],$$

$$z = \tfrac{1}{2}\left[(t_1 + \sqrt{abz_1})^n - (t_1 - \sqrt{abz_1})^n\right] / \sqrt{ab}.$$

Cunoscând pe t şi z găsim pe x şi y. Se va da valori lui a şi b mai mici decât 10, şi se vor rezolvà ecuaţiile aflate.

Notă. Soluţiunea se simplifică dacă se observă că o soluţiune $a0b$ şi $b0a$ dă soluţia $(na)0(nb)$ şi $(nb)0(na)$ cu condiţie ca na şi nb să nu depăşiască bazele sistemelor. Cu alte cuvinte ne putem ocupà numai de cazurile în care a şi b sunt prime între ele.

Soluţia D-lui MURĂROIU nu este generală, căci cere $(y - x) = (a - b)\,z$, adică diferenţa bazelor divizibilă cu diferenţa cifrelor căutate. Cu modul acesta soluţia 406 şi 602 nu corespunde acestei condiţiuni.

I. I.

PROBLEMA 3648. *Se dă triunghiului* ABC *înscris în cercul cu centrul în* O *şi fie* H *ortocentrul, iar* M, N, P *proecţiile centrului* O *pe* BC, CA *şi* AB.

Să se stabilească relaţiile:

$$OM \operatorname{tg} A + ON \operatorname{tg} B + OP \operatorname{tg} C = p$$

şi

$$\frac{AH \sin 2A + BH \sin 2B + CH \sin 2C}{BC \cos^2 A + CA \cos^2 B + AB \cos^2 C} = constant.$$

GH. GH. VASILIU.

Soluţie dată de D-nii: N. ALDEA, A. ANGELESCU, GH. BALABAN, EDM. CAŢICHI, P. DOBROMIRESCU, HR. DĂSCĂLESCU, B. V. GATAIANŢU ADR. GHEORGHIU, GH. T. GHEORGHIU, P. GHIŞOIU, PAUL IGNAT, GR. MAREŞ, M. NEGREA, CR. RÂMNICEANU, EUGEN RUSU, I. C. SANDU, GH. SPRINCEANĂ, AURELIAN STAN, şi J. N. VÂLCEANU.

Se ştie că M, N, P sunt mijloacele laturilor, iar $\sphericalangle BOC = 2A$; avem dar

$$OM \operatorname{tg} A = \frac{a}{2}, \quad ON \operatorname{tg} B = \frac{b}{2} \quad \text{şi} \quad OP \operatorname{tg} C = \frac{c}{2}.$$

Deci:

$$OM \operatorname{tg} A + ON \operatorname{tg} B + OP \operatorname{tg} C = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

Deasemenea se cunosc formulele

$$AH = 2R \cos A \quad , \quad \text{etc} \ldots \quad \text{(G. M. XXX, pag. 233)}$$

şi

$$2 \sin A = \frac{a}{R} \quad , \quad \text{etc} \ldots$$

Vom vedeà dar

$$2AH \sin A = 2a \cos A$$

sau

$$AH \sin 2A = 2BC \cos^2 A.$$

De unde

$$\frac{AH \sin 2A}{BC \cos^2 A} = 2.$$

Prin urmare, în mod analog avem:

$$\frac{AH \sin 2A}{BC \cos^2 A} = \frac{BH \sin 2B}{CA \cos^2 B} = \frac{CH \sin 2C}{AB \cos^2 C} = 2.$$

Putem, aşà dar scrie

$$\frac{\Sigma AH \sin 2A}{\Sigma BC \cos^2 A} = 2 = \text{constant.} \qquad \text{c. c. t. d.}$$

Au demonstrat relaţiile din enunţ prin ajutorul altor formule trigonometrice D-nii: A. BURICHOVICI, E. BURLACU, C. COSTĂCHESCU, C. COŞNIŢĂ, GR. GRUBERMANN, C. D. IONESCU-ŢIU, GH. MIHAI, I. MURĂROIU, I. PANŢU, A. PÂRVU, N. PAVEL-ONIZABA, I. C. SAVIN, PANAITE N. THEODOR, N. VELICESCU, T. VELICESCU, I. O. ZAHARIA şi N. O. ZAHARIA.

Observaţiuni:

1. D-l C. Costăchescu a arătat şi relaţia

$$\frac{HA_1}{AB \cdot CA} + \frac{HB_1}{AB \cdot BC} + \frac{HC_1}{BC \cdot CA} = \frac{1}{4r_9}$$

unde A_1, B_1 şi C_1 sunt picioarele înălţimilor, iar r_9 este raza cercului lui Euler.

2. D-nii: Gh. Th. Gheorghiu şi N. O. Zaharia au generalizat relaţiile din enunţ, punându-le sub forma:

$$\overline{OM}^m \cdot \operatorname{tg}^m A + \overline{ON}^n \cdot \operatorname{tg}^n A + \overline{OP}^p \cdot \operatorname{tg}^p A = \frac{a^m + b^n + c^p}{2}$$

$$\frac{\overline{AH}^m \cdot \sin^m 2A + \overline{BH}^n \cdot \sin^n 2B + \overline{CH}^p \cdot \sin^p 2C}{\overline{BC}^m \cdot \cos^{2m} A + \overline{CA}^n \cdot \cos^{2n} B + \overline{AB}^p \cdot \cos^{2p} C} = 2^{m+n+p} = k.$$

3. D-l N. O. Zaharia a indicat şi relaţia

$$\frac{\overline{OM}^n \cdot \sin^n 2A + \overline{ON}^n \cdot \sin^n 2B + \overline{OP}^n \cdot \sin^n 2C}{\overline{BC}^n \cdot \cos^{2n} A + \overline{CA}^n \cdot \cos^{2n} B + \overline{AB}^n \cdot \cos^{2n} C} = 1 = \text{constant.}$$

Lt.-Col. Liteanu.

PROBLEMA 3687. *Să se arate că expresiunea:*

$$N \equiv \frac{p\,(E+1)^{p-1}}{B_p}$$

unde E *şi* B *sunt respectivi numerele lui* Euler *şi* Bernoulli, *are o valoare întreagă. Să se calculeze acea valoare.*

Căpitan I. Linteş.

Soluţie dată de D-nii: Gh. Th. Gheorghiu-Gladis şi Nic. I. Dinulescu (Bratoveşti-Dolj).

In «Einleitung in die infinitesimalrechnung» Er. Cesàro, la pag. 298 se dă formula:

$$B_p = \frac{p\,(E+1)^{p-1}}{2^p\,(2^p - 1)}$$

de unde rezultă imediat că:

$$N = 2^p\,(2^p - 1)$$

unde

$$p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Pe cale detaliată, problema se rezolvă stabilindu-se mai întâi funcţiunile generatoare al numerelor lui BERNOULLI:

$$e^{B_n} - e^{B_n} \cdot e^{-n} = n$$

şi EULER:

$$e^{E_n} \cdot e^{n} + e^{E_n} \cdot e^{-n} = 2$$

unde dând lui n valori convenabile, obţinem expresia din problemă.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

PROBLEMA 3737. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt[4]{n-a} + \sqrt[3]{n-b} = 7$$

ştiind că: $a - b = 343$.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţia I dată de D-şoara: JUSTINA GURĂU (Studentă Bucureşti) şi de D-nii: GHEORGHE TH. GHEORGHIU, PETRE GHIŞOI, JUSTIN VÂLCEANU şi IOAN VONICA.

Punând $y^4 = n - a$, găsim ecuaţia:

$$y + \sqrt[3]{y^4 + 343} = 7$$

care suferind diverse transformări spre a elimină radicalul, se mai poate scrie succesiv:

$$y^4 + 343 = (7 - y)^3$$

$$\therefore \quad y^4 + y^3 - 21y^2 + 147y = 0$$

$$\therefore \quad y(y^3 + y^2 - 21y + 147) = 0$$

$$\therefore \quad y(y + 7)(y^2 - 6y + 21) = 0.$$

Deci rădăcinile vor fi:

$$y_1 = 0 \; ; \; y_2 = -7 \quad \text{şi} \quad y_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{-3}.$$

Prin urmare:

$$x_1 = a \; ; \; x_2 = 2401 + a \; ; \quad \text{şi} \quad x_{3,4} = a - 9(8\sqrt{-3} \pm 47).$$

Soluţia II-a dată de D-şoara: SANDA GLATZ (Lic. «Regina Maria») şi de D-nii: EMILIAN MIHALCEA, OVIDIU BIRCEANU şi IOAN SAVIN.

Punând:

$$y = \sqrt[4]{n-a} \quad \text{şi} \quad z = \sqrt[3]{n-b},$$

apoi ţinând seamă că:

$$(n-b)-(n-a) = a-b = 343$$

găsim sistemul:

$$\begin{cases} y+z = 7 \\ z^3 - y^4 = 343 \end{cases}$$

care prin rezolvare conduce la aceleaşi rădăcini de mai sus.

Notă. S'au mai primit soluţii dela D-nii: N. Velicescu, S. Ţilenschi, C. Ionescu-Ţiu, P. Ghişoiu şi B. Drinceanu.

PROBLEMA 3741. *Câte numere există cari nu au cifre identice?*

V. C. Popescu.

Soluţie dată de D-nii: N. Aldea, R. Brassat, I. Boian, P. Bumbulici, E. Dumitrescu, H. Ionescu, R. Raiceff şi I. Sassu.

Cel mai mic număr va fi format din o singură cifră, iar cel mai mare din 10 cifre. Dacă din suma aranjamentelor:

$$S_1 = A_{10}^1 + A_{10}^2 + \ldots + A_{10}^{10}$$

vom scoate suma:

$$S_2 = A_9^1 + A_9^2 + \ldots + A_9^9$$

adică numerele cari încep cu 0, atunci obţinem soluţia problemei.

In adevăr făcând calculele găsim:

$$S_1 - S_2 = 8877691.$$

Observaţiuni:

1) D-l Raiceff arată că problema No. 3741 este un caz mai general al unor probleme date în „Cours d'Algebre par B. Niwenglowski" pag. 62.

2) D-l Petre Almăjan a considerat şi numerele care încep cu 0, găsind soluţia:

$$S_1 = 9864090.$$

3) D-l Har. P. Ionescu, observă că numerele de o singură cifră n'ar mai trebui socotite, de oarece condiţia de „cifre identice" antrenează condiţie de două sau mai multe cifre.

Notă. S'au mai primit soluţii dela D-nii: N. Zaharia, C. Ionescu-Ţiu, E. Burlacu, I. Alexiu.

Căpitan I. Linteş.

PROBLEMA 3743. *Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$3(x+y)^4 - 8(x^2+y^2)xy = 528.$$

I. MURĂROIU.

Soluție dată de D-nii: EUG. BURLACU, VLADIMIR I. CRIVĂTZ (Liceul Matei Basarab, București), EUGEN I. DUMITRESCU (Buzău), ADRIAN C. GHEORGHIU (București), GHEORGHE TH. GHEORGHIU-GLADIȘ, PETRE I. GHIȘOIU (București), CONST. D. IONESCU-ȚIU (Șc. Mil. de Geniu), EMILIAN I. MIHALCEA (Buzău), JUSTIN N. VĂLCEANU (Tg.-Jiu).

Ecuația se poate scrie succesiv

$$3(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2) - 528 = 2(x+y)^4 + (x+y)^4$$

$$- 8x^3y - 8xy^3 - 528 = 0$$

sau

$$2(x+y)^4 + (x-y)^4 = 528.$$

Punând

$$x+y = u$$

$$x-y = v$$

avem

$$2u^4 + v^4 = 528$$

sau

$$(1) \qquad v^4 = 2(264 - u^4).$$

Se vede că, deoarece u și v sunt numere întregi, trebuie ca u să fie neapărat număr par, adică de forma

$$u = 2w.$$

Relația (1) va deveni dar

$$(2) \qquad v^4 = 2(264 - 16w^4) = 16(33 - 2w^4) = 2^4.(33 - 2w^4).$$

Din această relație deducem mai întâi că

$$33 - 2w^4$$

trebuie să fie pozitiv și al doilea să fie bipatratul unui număr întreg.

Aceste două condițiuni nu sunt îndeplinite decât pentru $w = \pm 2$ în care caz $u = \pm 4$, iar $v = \pm 2$.

Așă dar

$$x+y = \pm 4$$

$$x-y = \pm 2.$$

Rezolvirea acestui sistem ne dă următoarele soluţiuni pentru x şi y.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Soluţiune dată de D-ra GLATZ SANDA (Liceul Regina Maria). Ecuaţia se poate scrie

$$3(x^2 + y^2 + 2xy)^2 - 4 \cdot 2xy(x^2 + y^2) = 528.$$

Insemnând

$$x^2 + y^2 + 2xy = p \qquad \text{sau} \qquad x + y = \pm\sqrt{p} \qquad (1)$$

şi

$$(x^2 + y^2)2xy = q \qquad \text{sau} \qquad xy = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{4} \qquad (2)$$

avem

$$3p^2 - 4q = 528 \qquad \text{sau} \qquad p^2 - 4q = 528 - 2p^2.$$

Aşà dar expresiunea (2) devine

$$xy = \frac{p \pm \sqrt{528 - 2p^2}}{4} \qquad (2')$$

Deci mai întâi $264 > p^2$ sau $p \leqslant 16$ pentruca xy să fie real şi p să fie par. Pe de altă parte din (1) se deduce că p trebuie să fie un patrat perfect. Aceste condiţiuni nu sunt îndeplinite decât de $p = 4$ şi $p = 16$. Numai $p = 16$ dă pentru xy o valoare întreagă. Aşà dar $p = 16 = (x + y)^2$ sau

$$x + y = \pm 4$$

iar

$$xy = 5 \text{ sau } 3.$$

Sistemul

$$\begin{cases} x + y = \pm 4 \\ xy = 5 \end{cases}$$

dă soluţiuni imaginare, iar sistemul

$$\begin{aligned} x + y &= \pm 4 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

dă soluţiunile arătate mai sus.

Au dat soluţiuni mai lungi şi nu toate, D-nii: BOIAN IOAN, BRASSAT ROMEO, SAVIN C. IOAN.

Observare. Prezenta problemă a mai apărut în acest an sub No. 3774 (No. 9 al „G. M").

A. B.

PROBLEMA 3767. *Să se dovedească inegalitatea*

$$b-(\sqrt{a^2+b^2}-b)\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}>0$$

unde a *şi* b *sunt pozitivi, iar* L *înseamnă logaritmul în baza* e.

TH. ANGHELUTZĂ.

I. *Soluţie.* Se observă că expresiunea

$$\sqrt{a^2+b^2}+b,$$

este pozitivă oricare ar fi a şi b reali, $a\neq 0$; bine înţeles $\sqrt{a^2+b^2}$ fiind rădăcina pozitivă. Prin urmare dacă $a>0$ expresiunea

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a},$$

este pozitivă oricare ar fi b real şi deci logaritmul ei este real. Vom presupune deci a pozitiv şi b real. In aceste condiţiuni inegalitatea dată se poate scrie

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}-\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}>0,$$

sau încă

$$(1)\qquad \frac{b}{a}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{b}{a}\right)-\mathrm{L}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{b}{a}\right)>0.$$

Să considerăm funcţiunea

$$y=x(\sqrt{1+x^2}+x)-\mathrm{L}\,(\sqrt{1+x^2}+x),$$

şi să-i studiem variaţia când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$. In tot acest interval a lui x funcţia y este reală. Derivata lui y este

$$y'=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2-1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Derivata se anulează pentru $x=0$ şi este de acelaşi semn cu x. Prin urmare când x creşte dela $-\infty$ la 0 atunci y descreşte dela $+\infty$ la 0; şi când x creşte dela 0 la $+\infty$ atunci y creşte dela zero la $+\infty$ şi deci avem inegalitatea

$$y>0$$

oricare ar fi x real şi diferit de zero. Pentru

$$x=\frac{b}{a}$$

această din urmă inegalitate devine inegalitatea (1) şi deci inegalitatea propusă este dovedită pentru $a > 0$ şi b real diferit de zero.

II. *Soluţie.* Se ştie că avem inegalitatea

$$e^x > 1 + x$$

pentru x real şi diferit de zero. De altfel această inegalitate se poate lesne dovedi studiind variaţia funcţiunii

$$y = e^x - x - 1,$$

din care se conchide că cea mai mică valoare a lui y este zero pentru $x = 0$.

Dacă în această din urmă inegalitate se pune

$$x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2} - b}$$

se obţine inegalitatea

$$e^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}} > \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-b},$$

care poate fi încă scrisă

$$e^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}} > \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}(\sqrt{a^2+b^2}+b).$$

Această inegalitate are ca consecinţă inegalitatea

$$e^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}} > (\sqrt{a^2+b^2}+b)$$

căci avem

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} > 1.$$

Dar în baza e logaritmii variază în acelaş sens cu numerele şi deci conchidem

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-b} > \mathrm{L}\,(\sqrt{a^2+b^2}+b)$$

şi prin urmare inegalitatea dată este dovedită în aceleaşi condiţiuni ca şi în soluţia întâia.

Au rezolvat frumos problema dată D-nii: Adrian C. Gheorghiu, Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş, S. Ţilenschi. N'au cercetat însă dacă problema este posibilă şi în alt caz afară de cel dat în enunţ. Cu această mentiune soluţia 2-a se apropie de soluţia D-lui Adrian Gheorghiu.

*EXERCIŢII

4. Se cere cubul *abcadef* în care *cde* e tot cub, *fa* alt cub.

A. I. Bidoianu.

R. Cum $cde = 125, 216, 343, 512, 729$ şi $fa = 27, 64$, reese că soluţia trebuie căutată printre numerile $7b17252$; $7b27162$; $7b37432$; $7b57122$; $7b77292$; $4b14256$; $4b24166$; $4b34436$; $4b54126$; $4b74296$. Căutăm a scoate rădăcina cubică se găseşte $4574296 = 166^3$.

5. Se cer numerile întregi mai mici ca 1000 aşa ca restul împărţirii prin 23 să fie patratul restului împărţirii prin 18.

I. Curchi.

R. Trebuie să avem:

$$N = 18x + z = 23y + z^2, \qquad z^2 < 23,$$

Deci $z = 1, 2, 3$ sau 4. Înlocuind şi rezolvând ecuaţia nedeterminată se găsesc soluţiile *138, 292, 326, 414, 415, 561, 690, 740, 828, 829, 975.*

6. Se cer patratele *abcdef* în care *ab, cd, ef* sunt patrate.

T. G. Velicescu.

R. Patratul cerut este coprins între $\sqrt{161616}$ şi $\sqrt{168181}$ adică între 402 şi 408. Ridicăm numerele dintre 402 şi 412 la patrat şi găsim soluţia $166464 = 408^2$.

Procedăm la fel cu patratele 25, 36, 49, 64, 81 şi mai găsim soluţia $646416 = 804^2$.

7. Se cere patratul de forma *abcdeb* în care *ab* e patrat şi $cd = \frac{1}{2}ab$

M. I. Ungheanu.

R. Nu putem luă decât $ab = 36$ sau $ab = 64$. Deci avem patratele $3618e6$ sau $6432e4$. Căutând a extrage rădăcina găsim soluţia $643204 = 802^2$.

PROBLEME PROPUSE.

3774[1]). Se dau două numere prime între ele m şi k. Cum pot fi între ele numerele m, k, $(m - k)$, $(2m - 5k)$ luate două câte două? Să se generalizeze.

P. Sergescu.

*3797[2]). Fie un triunghiu ABC şi triunghiul său *ortic* A'B'C'. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de antiparalelele egale $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ înscrise respectiv în unghiurile A, B, C ale triunghiurile ABC; apoi $A_2B_2C_2$ triunghiul determinat de dreptele $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ [$A_2 \equiv (\alpha'\beta, \gamma'\alpha)$, $B_2 \equiv (\beta'\gamma, \alpha'\beta)$, $C_2 \equiv (\gamma'\alpha, \beta'\gamma)$].

Axele de omologie ale perechilor de triunghiuri omologice: ABC cu A'B'C', A'B'C' cu $A_2B_2C_2$, ABC cu $A_1B_1C_1$, *sunt concurente.*

Adrian C. Gheorghiu.

1) Problema No. 3774, publicată la pag. 360, Vol. XXXIV, fiind identică cu problema No. 3743, publicată la pag. 239, Vol. XXXIV, se înlocueşte cu prezenta.

2) Problema No. 3797, publicată la pag. 440, Vol. XXXIV, fiind identică cu problema No. 3769, publicată la pag. 320, Vol. XXXIV, se înlocueşte cu prezenta.

* 3821. Dacă c este un număr, iar a şi b cifre, care este numărul care are ca rădăcină patrată ab, $c...$ şi ca rădăcină cubică $b, c...$?

N. O. Zaharia.

* 3822. Trouver une quatrième puissance exacte telle que le nombre formé par ses quatre chiffres à droite égale sa racine quatrième.

V. Thébault.

* 3823. Să se arate că în orice triunghiu avem

$$\frac{9}{14}p < m < \frac{5}{4}p,$$

unde p înseamnă perimetrul triunghiului, iar m suma medianelor.

Ion Mărgineanu.

* 3824. Din vârfurile unui romb, luate drept centre, se descriu patru cercuri egale.

Să se arate că din cele douăsprezece puncte de intersecţie obţinute, patru sunt aşezate pe diagonalele rombului, iar celelalte opt pe două cercuri concentrice.

Petre Bumbulici.

* 3825. Fie O cercul circumscris triunghiului ABC şi $A_1B_1C_1$ triunghiul format de tangentele în A, B, C la cercul O. Dintr'un punct P, de pe cercul O, coborâm perpendicularele $\overline{Pa}$, $\overline{Pb}$, $\overline{Pc}$ şi $\overline{P\alpha}$, $\overline{P\beta}$, $\overline{P\gamma}$ respectiv pe laturile celor două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$. Să se demonstreze relaţiunea

$$\overline{P\alpha} \cdot \overline{P\beta} \cdot \overline{P\gamma} = \overline{Pa} \cdot \overline{Pb} \cdot \overline{Pc}.$$

Florin K. Ţinţu.

* 3826. Dacă O, H, ω, A', A'' sunt într'un triunghiu ABC respectiv: centrul cercului circumscris, ortocentrul, centrul cercului celor nouă puncte, mijlocul laturei BC, piciorul înălţimii AH, să se construiască triunghiul ABC cunoscând

I) punctele O, H şi A';

II) » A'', H şi ω.

Vladimir I. Crivăţ.

*3827. Fie I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente în triunghiul ABC. Să se demonstreze relaţiunile

$$\sum \frac{\overline{AI}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \sum \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AI_a}^2} = 1$$

$$\sum \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AI}} = \sum \frac{\overline{AI_a}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$$

$$\sum \frac{\overline{AI}^2\cdot\overline{BI_a}^2}{\overline{AB}} = \sum \overline{AI}^2\cdot\overline{BC}$$

(cei trei termeni ai fiecărei sume se obţin făcând permutări circulare asupra literelor A, B, C şi indicilor *a*, *b*, *c*).

CEZAR COŞNIŢĂ.

*3828. Fie ABC un triunghiu oarecare şi M, N, P mijloacele laturilor sale. Se iau numai într'un sens punctele X, Y, Z, astfel ca

$$\overline{MX} = 2d_a \cdot \operatorname{tg}(B - C)$$

$$\overline{NY} = 2d_b \cdot \operatorname{tg}(C - A)$$

$$\overline{PZ} = 2d_c \cdot \operatorname{tg}(A - B).$$

d_a, d_b, d_c fiind distanţele punctului lui EULER la laturi.

Să se demonstreze că dreptele AX, BY, CZ sunt concurente.

CONST. C. POPOVICI.

3829. Se dau funcţiunile:

(1) $5xy + 3x + 2y + 3$; (2) $3xy + 4x + y + 7$

şi se cer valorile întregi pozitive ale lui x şi y, care să facă simultan pe prima funcţiune un număr triunghiular, iar pe a doua un patrat perfect.

COL. GH. BUICLIU.

*3830. Dacă în triunghiurile ABC, A'B'C' avem:

$$\operatorname{tg}A/\operatorname{tg}A' = \operatorname{tg}B/\operatorname{tg}B' = \operatorname{tg}C/\operatorname{tg}C',$$

putem conchide că triunghiurile sunt asemenea?

I. IONESCU.

ERATĂ: Rândul 4 al problemei No. 3800 să se citească:
„.... cu 2% pe *cal—oră* mai puţin (în loc de 8% mai mult)....“

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. (2643, 3806, 18, N, P); *Alexandrescu A. I.* (3803); *Avram N. C.* (3803); *Boian C. I.* (3789, 803, 18, P); *Burlacu E.* (3742); *Cristescu A.* (3746, 52); *Ghişoiu I. P.* (3803, 16, 18); *Goormaghtigh R.* (3738, 45, 64, 90, A, N, P, R); *Grecu M. C.* (3692, 777); *Ionescu H.* (3746, 52); *Ionescu-Ţiu C.* (3742, 52, 89); *Millea G. E.* (3737, 77, 803); *Mocănescu I.* (3742); *Murăroiu I.* (2608, 3719, 803, 07, E, P); *Negrea A. M. Leonte* (3818); *Păun M. Gh.* (3672, 777); *Thébault A.* (A, P); *Ungheanu I. A.* (P); *Veliceanu I.* (3789); *Velicescu N. N.* (3728, 56, 83, 803); *Voicu C. I.* (3803); *Voicu Gh. N.* (P); *Zaharia N.* (3734, 58, 818, N, P); *Zamfirescu O. Gh.* (3672, 777).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sferă de coală*, iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer Inspector General C. Malcoci, Directorul General al Exploatării Monopolurilor (adresa: Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
a „ASOCIAȚIEI”

ANUL XXXV.

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1929.

SUMARUL

1. Sur les cordes d'une courbe vues d'un point fixe sous un angle constant . . *R. Goormaghtigh.*
2. Proprietăți ale patrulaterului inscriptibil *Ion I. Georgescu-Racoviță.*
3. Concursul Gazetei Matematice.
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „Vasile Conța“ pe anul 1929.
5. Note matematice: 11 — 19.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografii.
8. Cereri: 183.
9. Probleme rezolvate: 3165, 3292, 3667, 3742, 3745.
10. Exerciții: 8 — 12.
11. Probleme propuse: 3733, 3831 — 3840.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIILE STATULUI
1929

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXV se compune din D-nii: **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului; **O. Ţino,** Doctor în Matematici, Profesor în Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul General al Exploatării Monopolurilor, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 501, 02, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 38, 58. 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 85, 208, 30, 55, 60, 75, 78, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 90, 400, 05, 20, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 24, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 69, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 49, 73, 76, 80, 84, 93, 97, 99, 804, 05, 08, 09, 10, 13, 20, 21, 22, 24, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţă că dela 30 Octomvrie a. c. mai face parte din Societatea noastră **D-ra Gabriela Ţiţeica,** Licenţiată în matematici.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXV *SUPLIMENT* No. 3

RECREAŢIUNI

1. **Aritmetica religie!** In *Conseiller du peuple*, LAMARTINE spune: „Sunt virtuţi fraternitatea şi critica? Da. Deci Societatea ea însăşi trebuie să exercite aceste două virtuţi; deci Societatea nu trebuie, după cum pretind economiştii, *care nu au ca religie decât aritmetica*, să se desintereseze de aceste două mari datorii şi să zică: *laisser faire et passer* mizeria şi moartea".

I. IONESCU.

* * *

2. **Curiosités arithmétiques.** Les égalités signalées par M. V. THÉBAULT *(Gazeta Matematică*, Supliment No. 1) se trouvent indiquées dans LUCAS, *Théorie des nombres*, tome I, 1891, pag. 28; LUCAS, *L'arithmétique amusante*, 1895, pag. 67 — 68; FOURREY, *Récréations arithmétiques*, 6-ième éd. 1923, pag. 24; ROUSE BALL, *Récréations mathématiques*, éd. 1926, tome I, pag. 29.

Nous avons signalé *(Intermédiaire des Mathématiciens*, 1918, pag. 44) que ces relations sont contenues dans la proposition suivante:

Les nombres

$$1,\ (p+1),\quad (12p+2),\quad (123p+3),\quad \ldots (123456789p+9)$$

s'écrivent:

$$a_1,\quad 10a_1+a_2,\quad 10^2a_1+10a_2+a_3,\ldots$$
$$10^8a_1+10^7a_2+10^6a_3+\ldots+10a_8+a_9,$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ *formant une progression arithmétique dont le premier terme est* $(p+1)$ *et la raison* $(p-9)$.

Par exemple:

$$1\times 7+1=8.$$
$$12\times 7+2=86.$$
$$123\times 7+3=864.$$
$$1234\times 7+4=8642.$$
$$12345\times 7+5=86420.$$

R. GOORMAGHTIGH.

* * *

3. **Socoteală fără ... socoteală!** D-l X pentru a-şi pune echilibru în cheltueli, s'a hotărât să-şi ţie socoteala zilnic. A cumpărat un carnet. In prima zi scrie: „4 Ianuarie 1929. Mărci poştale .. 10 lei. La un cerşetor... 2 lei. Diverse... 1200 lei.

Pentru restul zilelor şi-a uitat carnetul în birou.

GH. B.

* * *

4. **Să se demonstreze că DA = NU.** Pentru aceasta vom înlocui literile prin valorile lor în scrierea telegrafică MORSE. Avem în adevăr:

$$N=-.\ ,\quad U=..-\ ,\quad D=-..\ ,\quad A=.-.$$

Inlocuirea ne dă:

$$-\ldots-=-\ldots-,$$

ceeace este o identitate!

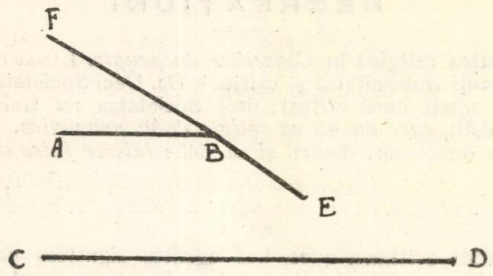
C. C. E. D. D.

AURELIAN I. STAN.

* * *

5. **Geometrie literară.** In *„Lydda"* de DUILIU ZAMFIRESCU, găsim la pag. 131: „Ţi-am spus că ştiinţa este cinstea şi dovada. Dă-mi, te rog, un creion şi o hârtie.

... Iată o linie AB şi o altă linie CD. (Reproducem cât mai fidel figura textului).



Închipuieşte-ţi că din punctul fix B ai duce o a treia linie până în E. Mai închipuieşte-ţi că punctul acesta E ar alerga pe linia CD la infinit. Este evident că oricât de mult ar alerga, linia BE nu va deveni niciodată paralelă cu CD. Acum prelungeşte linia BE din punctul B până în punctul F: cu cât punctul E se va depărtà mai mult pe linia CD, în direcţiunea D, cu atât punctul F va tinde să se apropie de punctul A. Dar oricât s'ar depărtà E, alergând în vecia veacurilor, F nu va ajunge niciodată în A. Închipuieşte-ţi acum un sistem în mişcare, FA, şi presupune că tu, Lydda, ai fi o planetă, care, în sistemul acesta de mişcare, ar militâ continuu către A: crezi oare că ai şti către ce te mişti, şi unde te afli? Nu, de sigur. Tocmai aşà stăm noi cu unele din dovezile noastre: pentru înţelepciunea omenească, putem ajunge până a presupune că sistemul nostru planetar merge către ceva, că suntem undeva, dar către ce mergem şi unde stăm, nimeni nu va şti niciodată; ochiul şi mintea noastră este, faţă de unele margini, cum ar fi ochiul şi mintea ta din punctul F, faţă cu punctul A. Aşà stând lucrurile, înţelegi, Lydda, că noi oamenii de pe pământ, suntem, infinit de mici şi infinit de mari. Suntem mici, fiindcă eternitatea întreagă nu ne este deajuns ca să descoperim şi să cunoaştem necontenit legile naturii; şi suntem mari tocmai pentru că înţelegem şi am puteà să ştim tot, dacă organele noastre ar fi, faţă cu energia Universului, cum sunt ale tale, acum, faţă cu raportul dintre F şi A, iar nu cum ar fi când tu te-ai aflà pe o planetă, care ar bate infinitul dintre F şi A".

Priceperea fără figură e imposibilă, căci nu se spune că AB e paralelă cu CD şi că BE şi BF e aceeaş dreaptă. Găsim aci drepte paralele ce nu se întâlnesc la infinit, rapoarte între puncte, etc.

N. ALDEA.

* * *

5. **Geometria pe scenă.** In ziarul *„Rampa"* din anul 1928 pag. 1 găsim: *„Geometria în spaţiu"*. Sub acest sugestiv titlu se va reprezentà o piesă în cursul stagiunei viitoare a teatrului *Mathurias* din Paris; piesa este datorită lui PAUL NIVOISE".

N. N. RADOVENEANU.

* * *

6. **Factoriala de zero.** Avem:

$$(p-1)! = p!/p.$$

Facem $p = 1$ şi ne ese $0! = 1$.

I. NACU.

* * *

7. **Derivata exponenţialei e nulă.** Avem:

$$a^x = a.a.a.a...a \qquad \text{(de } x \text{ ori)}.$$

Derivata părţii a doua e o sumă de produse având fiecare un factor nul; deci este nulă.

I. NACU.

* * *

8. **Suma a două numere oarecare e egală cu produsul lor.** Aceasta rezultă imediat din:

$$\log a + \log b = \log c,$$

dacă suprimăm factorul comun log dela toţi termenii.

I. COSEREANU.

Demonstraţia e vicioasă căci nu e permisă împărţirea cu un termen nul, şi log este nul căci are pe 0 (zero) ca factor într'însul!

I. I.

* * *

9. **Să se arate că** $3 = \sqrt{2}$. Fie sistemul:

$$xy = 6, \qquad x^2 - y = (x - \sqrt{y})(3 + \sqrt{y}):$$

E uşor de văzut că acest sistem e verificat de $x = 3$, $y = 2$. Ultima ecuaţie însă ne dă:

$$x^2 - y = 3x - 3\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y,$$

$$x(x-3) = \sqrt{y}(x-3)$$

$$x = \sqrt{y}$$

şi înlocuind pe x şi y prin valorile lor ese: $3 = \sqrt{2}$.

c. c. e. d. d.

V. C. POPESCU.

* * *

10. **Să se demonstreze că** $1/a^n$ **e mai mic decât** $1/a^{n+1}$. Avem:

$$\log(1/a) = \log(1/a) \qquad \text{şi} \qquad n < n+1,$$

de unde înmulţind avem:

$$n \log(1/a) < (n+1) \log(1/a),$$

$$\log(1/a)^n < \log(1/a)^{n+1},$$

şi trecând dela logaritmi la numere:

$$1/a^n < 1\, a^{n+1}. \qquad \text{c. c. e. d. d.}$$

S-LT. E. ST. IACOB.

* * *

11. **Clauză testamentară.** BOLYAI a cerut prin testamentul său ca pe mormântul lui să se planteze un măr, în onoarea lui NEWTON.

I. I.

* * *

12. **Matematica se răsbună.** D-l O. GOGA, vorbind de G. COŞBUC, în discursul său de recepţiune la Academie, după ce spune că acestuia nu-i plăcuse matematicile, şi că pe când acesta din urmă ereă la Bucureşti, a fost foarte mult ajutat de către nişte ingineri, adaugă:

„Aceasta (e vorba de ajutorul dat de ingineri) a fost o răsbunare postumă a matematicilor".

I. POPA.

* * *

13. **Orice elipsă e un cerc.** La o elipsă produsul coeficienţilor unghiulari a doi diametri conjugaţi este $-b^2/a^2$. Pe de altă parte axele de simetrie ale elipsei sunt şi ele doi diametri conjugaţi. Deci produsul coeficienţilor lor unghiulari este tot $-b^2/a^2$. Aceste drepte sunt însă perpendiculare şi în acest caz se ştie că produsul coeficienţilor unghiulari a două drepte perpendiculare este (—1). De aci deducem:

$$-b^2/a^2 = -1.$$

care ne dă $a = b$. Axele fiind egale, elipsa se reduce la un cerc, c. c. e. d. d.

M. A. CERNES.

* * *

14. **Egale ... dar diferite.** In „*Furtul căţeluşului alb*" de AL. KUPRIN, întâlnim la pag. 33:

„Işi luă pânea, o împărţi în trei părţi egale, întinse pe cea mai mare lui Sârghie, — băiatul creşte are nevoie de mâncare", — dete o alta căţeluşului, păstrând pe cea mai mică pentru el".

M. I. UNGHIANU.

* * *

15. **Cu patru scânduri a căror lăţime e mai mică decât lăţimea unui şanţ să se facă o punte peste acel şanţ. Scândurile nu se lucrează de loc, nici nu se prind cu fiare.**

Soluţia acestei probleme vechi este următoarea. Fie A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 cele patru scânduri. Punem capul B_2 peste capul B_1 al primei scânduri aşă ca acele scânduri să formeze un unghiu ascuţit $A_1(B_1B_3)A_2$. Scândura A_3B_3 o punem peste laturile acestui unghiu aşă ca A_3 să cază pe A_1B_1 şi B_3 pe A_2B_2. Punctele A_3, B_3 se pun la egală distanţă de B_1 şi B_2. Se iă scândura A_4B_4 şi se trece capul ei B_4 pe sub A_1A_2 şi se pune pe scândura A_3B_3 în mijlocul ei. Sistemul astfel format se aşează cu capetele B_1 şi B_3 pe unul din maluri şi cu A_4 pe celălalt.

Problema nu este posibilă dacă lungimile scândurilor nu trec de jumătatea lăţimei şanţului cu cantităţi apreciabile, necesare rezemării şi resfirării scândurilor. S'ar puteà studià care e minimum de lungime de scânduri pentru o lăţime dată a lor.

I. I.

* * *

16. **Hiperbolă hipercomică!** La un cinematograf, la care se anunţase „*Fie vorba între noi*" ereà la un anunţ scris pe o pagină „*revistă hiperbolică*" iar pe cealaltă „*revistă hipercomică*".

N. ALDEA.

* * *

17. **Aprecieri.** A. MAUROIS în *Climats*, pag. 154 pune pe ISABELLE să scrie: «Vous m'estimez *trois cents* quand je vaux *quarante*, Philippe, et c'est terrible. Quand vous vous apercevrez de votre erreur, vous croirez que je vaux *dix*... ».

Psihotecnica modernă a pătruns în literatură, înainte de a fi fost generalizată aplicării în practică la toate domeniile.

GH. B.

* * *

18. **Matematica în literatură.** Găsim în MARTIN EDEN de JACK LONDON pag. 19:

— „Trigo? Qu'est ce que c'est?

„Trigonométrie, repondit Norman. Une forme supérieure de Math.

— „Et qu'est ce que c'est que Math?

— „Les mathématique, l'arithmétique, repondit Norman en riant".

Iată Trigonometria ajunsă Aritmetică!

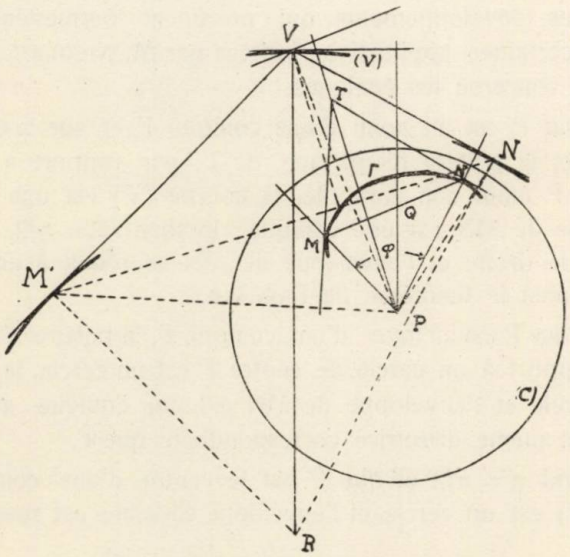
M. A. CERNES.

SUR LES CORDES D'UNE COURBE VUES D'UN POINT FIXE SOUS UN ANGLE CONSTANT

1. Dans un article récent (*Gazeta Matematica*, Nr. 10, vol. XXXIV, page 336), M. NICOLAU a démontré le théorème suivant :

Si MN *est une corde variable d'une courbe plane* Γ, *vue d'un point fixe* P *sous un angle constant* φ, *et si* T *est l'intersection des tangentes en* M *et* N *à* Γ, *le point de contact* Q *de* MN *avec son enveloppe appartient à l'isogonale de* PT *dans l'angle* MPN.

Nous nous proposons d'en exposer ici une nouvelle démonstration simple (voir fig.) Soient (C) un cercle de centre P, M′, N′, V



les pôles des droites MT, NT, MN, par rapport à (C). Les droites VM′, VN′ sont respectivement les polaires de M et N par rapport à (C), et M′, N′ sont les points où ces droites touchent la polaire réciproque de Γ par rapport à (C). Comme l'angle M′VN′ est egal à $\pi - \varphi$, on a ce théorème :

Si (C) *est un cercle quelconque de centre* P, *l'enveloppe de* MN *est la polaire réciproque, par rapport à* (C), *de l'isoptique d'angle* $\pi - \varphi$ *de la polaire réciproque de* Γ.

Or dans le déplacement de l'angle invariable M'VN', le centre instantané de rotation est le point de recontre R des perpendiculaires élevées sur VM', VN' respectivement en M', N'. La normale en V au lieu (V) de ce point est ainsi la droite VR et, comme VR est, dans l'angle M'VN', l'isogonale de la perpendiculaire abaissée de V sur M'N', la tangente à (V) en V est l'isogonale, par rapport à l'angle M'VN', de la parallèle à M'N' menée par V.

Mais le point Q de contact de la droite MN avec son enveloppe est le pôle de la tangente à (V) en V ; dès lors Q appartient à la perpendiculaire abaissée de P sur cette tangente, et PQ est, dans l'angle MPN, isogonale de la droite PT, perpendiculaire à la polaire M'N' de T, ce qui démontre le théorème.

2. Les développements qui précèdent permettent d'obtenir aisément certaines applications traitées par M. Nicolau, notamment en ce qui concerne les coniques.

Quand P est un point d'une conique Γ et que φ est un angle quelconque, la polaire réciproque de Γ, par rapport à un cercle de centre P étant une parabole, la courbe (V) est une conique et l'enveloppe de MN est une conique ; lorsque $\varphi = \pi/2$, la courbe (V) est une droite et l'enveloppe de MN se réduit à un point : on retrouve ainsi le théorème de Frégier.

Lorsque P est un foyer d'une conique Γ, la polaire réciproque de Γ, par rapport à un cercle de centre P est un cercle, la courbe (V) est un cercle et l'enveloppe de MN est une conique ayant même foyer P et même dirèctrice correspondante que Γ.

Quand $\varphi = \pi/2$ et que P est le centre d'une conique Γ, la courbe (V) est un cercle et l'enveloppe cherchée est aussi un cercle.

R. Goormaghtigh
Bruges, (Belgique).

PROPRIETAŢI ALE PATRULATERULUI INSCRIPTIBIL

Unele din proprietăţile de faţă sunt demonstraţii geometrice, pe care le-am dat unor exerciţii dela seminarul de „Geometrie Analitică", iar altele sunt comunicări pe care le-am făcut la „Grupul Geometric Universitar", de sub preşedenţia D-lor Profesori D-ri: G. ŢIŢEICA şi D. BARBILIAN.

* * *

1°. „Fie F piciorul perpendicularei duse din punctul de intersecţie al diagonalelor, pe polara acestui punct faţă de cercul

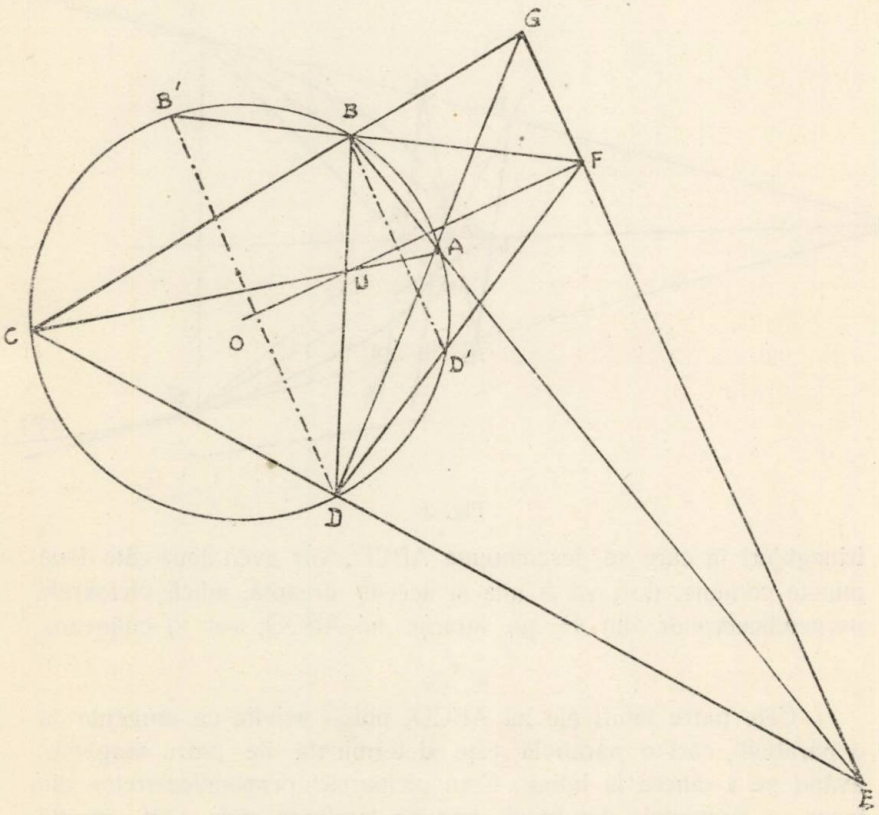


Fig. 1.

circumscris patrulaterului. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din F pe laturile patrulaterului sunt colineare".

In adevăr, dreapta $\overline{UF}$ (Fig. 1°) trece prin O. Fie D' şi B'

punctele unde dreptele $\overline{FD}$ şi $\overline{FB}$ taie a doua oară cercul O. Punctele B şi D' ca şi D şi B' sunt simetrice faţă de dreapta $\overline{UF}$, deci dreptele $\overline{BD'}$ şi $\overline{DB'}$ sunt paralele cu polara $\overline{EG}$, ca fiind perpendiculare pe aceeaş dreaptă $\overline{UF}$, ce este o axă de simetrie. Cum $\overline{AD}$ şi $\overline{BD'}$ sunt antiparalele, formând un patrulater ABDD' pe cercul O, rezultă că $\overline{AD}$ este antiparalelă şi faţă de $\overline{EF}$, deci patrulaterul FADE este inscriptibil şi celelalte patrulatere corespunzătoare vor fi inscriptibile. Punctul F este deci punctul lui MIQUEL al patrulaterului. Dreptele lui SIMPSON ale lui F faţă de cele patru

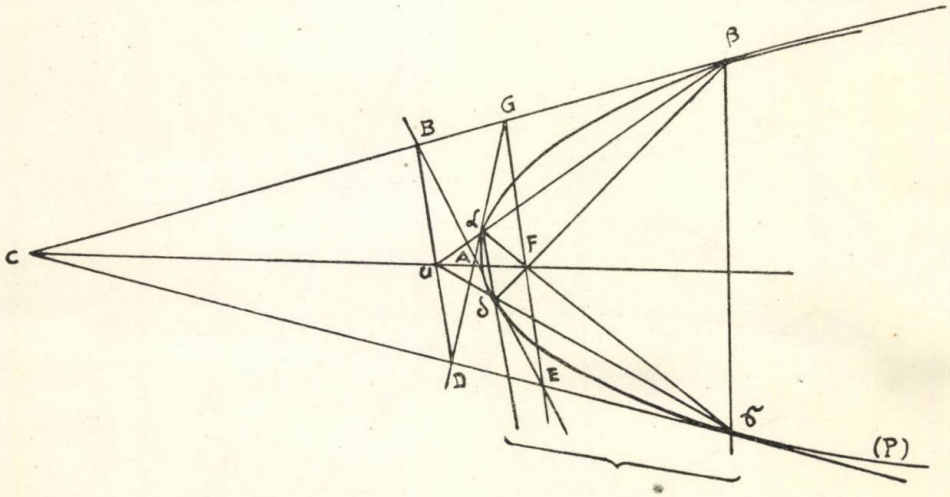


Fig. 2.

triunghiuri în care se descompune ABCD, vor aveà două câte două puncte comune, deci va fi una şi aceeaş dreaptă, adică picioarele perpendicularelor din F pe laturile lui ABCD, vor fi colineare.

* * *

Cele patru laturi ale lui ABCD, pot fi privite ca tangente la o parabolă, căci o parabolă este determinată de patru tangente, având pe a cincea la infinit. Cum picioarele perpendicularelor din focar pe tangentele parabolei, sunt pe tangenta dela vârf, rezultă că F dela 1^0, este chiar focarul parabolei înscrise în ABCD. Mai rezultă de aci o construcţie simplă a unui patrulater circumscris unei parabole şi înscris unui cerc. Fie trei tangente duse la para-

bolă. Se duce o a patra tangentă, aşa ca patrulaterul format de ele, să fie inscriptibil. Luăm punctul de intersecţie E a două din tangente, unim cu focarul şi prelungim până taie cea de a treia tangentă în G, de unde ducem a patra tangentă la parabolă, care este tangenta cerută. Această construcţie a fost precizată de colegul meu D-l I. NICOLAU-DOBRIDOR, în alt mod decât cel de mai sus, la şedinţa „Grupului Geometric Universitar" din 16/I/929, când am atras atenţia asupra construcţiei de mai sus. Mai demonstrez aci proprietatea lui STEINER.

„Ortocentrul unui triunghiu circumscris unei parabole, este pe directoarea acesteia". In adevăr, focarul acesteia este pe cercul circumscris triunghiului şi cum dreapta lui SIMPSON a focarului în raport cu triunghiul este tangenta la vârf a parabolei şi dreapta $\overline{FH}$ este împărţită în două părţi egale de dreapta lui SIMPSON, rezultă că H este pe directoarea parabolei.

Se ştie că: „Ortocentrele triunghiurilor în care se descompune un patrulater, sunt colineare". Laturile patrulaterului dat, considerate ca tangente, determină o parabolă la care triunghiurile în care se descompune patrulaterul, sunt circumscrise. După proprietatea lui STEINER, rezultă că ortocentrele sunt pe o dreaptă, dreapta „Ortocentroidală".

2°. „Să se arate că dreapta ortocentroidală a unui patrulater inscriptibil, trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor". Fie patrulaterul circumscris parabolei (P) şi înscris cercului O, construit, după construcţia indicată. Notaţiile din Fig. 1° le menţin şi la figura 2°. Se ştie că: $\overline{AC}$, $\overline{EG}$; $\overline{\alpha\gamma}$ şi $\overline{\beta\delta}$ sunt concurente. (Exercices de Géométrie VIème édition par F. G.—M. Théorème de NEWTON 1274 şi 1275 a Note). Pe de altă parte dreptele $\overline{\alpha\delta}$, $\overline{\beta\gamma}$ şi $\overline{GE}$ sunt concurente şi la fel, $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\delta\gamma}$ şi $\overline{AC}$ sunt concurente în U. Rezultă din patrulaterul $\alpha\beta\gamma\delta$ că dreapta $\overline{GE}$ este polara punctului U faţă de unghiul dreptelor $\overline{\alpha\delta}$ şi $\overline{\beta\gamma}$. Rezultă că dreapta $\overline{GE}$ este şi polara lui U faţă de parabolă. Ori, cum această dreaptă prin construcţie trece prin F, rezultă că U este pe directoarea parabolei. Dar am mai spus că dreapta ortocentroidală pentru un patrulater circumscris este chiar directoarea parabolei, deci „la un patrulater inscriptibil, dreapta ortocentroidală, trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului".

ION I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ.
Student Matematici l Bucureşti.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

In vacanţa Paştelui anului 1930, şi anume în zilele de 24, 25 şi 26 Aprilie, se va ţine un Concurs general de matematici în Bucureşti, între corespondenţii «*Gazetei Matematice*», elevi ai claselor IV, V, VI şi VII ale Liceelor din ţară, şi ai Anilor pregătitori depe lângă Facultăţile de Ştiinţe, sau depe lângă Şcolile speciale.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de candidaţi*, iar nu de profesori, părinţi, corespondenţi sau intermediari, D-lui Ion Ionescu, Inginer, strada Căluşei 23, Bucureşti IV, în plicuri recomandate sau înmânate direct D-sale. Cererile se primesc *numai* pânăla 1 Fevruarie 1930 şi vor arătà neapărat, în ordinea acì arătată şi numerotată :

1) Numele şi pronumele elevului, scrise lizibil.

2) Liceul şi clasa, sau Anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei ce se pregătesc în particular se va arătà şcolile în care au urmat anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3) Adresa în timpul Şcoalei şi în timpul vacanţei Paştelui, pentru a li se puteà face comunicările şi înştiinţările necesare.

4) Dacă dispune de mijloace de a venì în Bucureşti ; dacă are unde fi găzduit şi întreţinut acì în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urmà să fie procurate de Societatea «*Gazeta Matematică*». Dacă are nevoie de plata drumului, va indicà şi gara de unde va luà trenul pentru a venì la Concurs şi gara la care se va întoarce după Concurs.

5) Materia de matematici, din clasa în care urmează, la care voieşte să treacă proba teoretică în scris şi o altă materie la care voieşte să treacă o probă practică în scris. Ambele probe sunt obligatorii. Proba teoretică se va da în dimineaţa zilei de Joi la ora 8½ iar cea practică în aceiaşi zi la ora 14½.

La proba teoretică candidaţii vor aduce numai tocurile de scris şi nu vor aveà nici cărţi, nici hârtie, aceasta dându-li-se la Concurs. La proba practică, se vor cere calcule numerice şi logaritmice, construcţiuni grafice, epure şi prin urmare elevii vor aduce cu dânşii tabele, instrumente de desemn, compasuri, şi vor puteà consultà cursuri sau cărţi.

Sunt cu totul interzise comunicările între candidaţi la probele

teoreiice şi practice înainte de predarea lucrărilor sau eşirea din săli, până ce nu se face predarea lor definitivă.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea Concursului trebuiesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice. Sunt cu totul interzise intervenţiunile de orice natură.

Numărul candidaţilor admişi la Concurs va depinde de mijloacele de transport, de găzduire şi de întreţinere de care vom puteà dispune. Alegerea se va face dintre corespondenţii care au o activitate mai îndelungată şi au arătat, prin lucrările ce au trimes la această Revistă, o pricepere mai bună a ştiinţelor matematice. Se va căutà apoi ca să se aleagă elevi de prin cât mai multe licee, de prin toate clasele, de prin toţi Anii preparatori, şi atât de prin şcolile civile, cât şi militare.

Candidaţii înscrişi, care vor fi admişi la Concurs, vor primì o înştiinţare în luna Fevruarie, în care li se va arătà materiile care urmează să le pregătească, iar mai târziu o alta în care li se va arătà locul unde se va ţine Concursul, programul lui pentru probele scrise şi orale, locul unde vor fi găzduiţi şi ospătaţi cei lipsiţi de mijloace, iar în vacanţa Paştelui vor primì biletele sau banii pentru drum. Cei care din diferite pricini nu ar mai puteà venì la Concurs trebuie să ne încunoştiinţeze din vreme spre a pune pe alţi candidaţi eventual în locul lor. Înştiinţarea se va trimite înainte de vacanţa Paştelui.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii „*Gazeta Matematică*“ care nu vor aveà rude printre candidaţii admişi la Concurs.

In seara zilei de Sâmbătă 26 Aprilie va aveà loc o masă comună a membrilor Societăţii, cu toţi candidaţii admişi şi prezenţi la concurs.

Rezultatul Concursului se va publicà în Nr. 9, Mai 1930. Candidaţii care vor reuşì la Concurs vor primì ulterior Diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul reuşit la Concurs dintre elevii Anului Preparator depe lângă Şcoala Politecnică din Bucureşti va primì premiul «Anghel Saligny» de 1000 lei, oferit de un membru al Societăţii noastre. Primul reuşit la Concurs va primì premiul Lt.-Col. G. Tănăsescu în cărţi, conform înştiinţării făcute în Nr. 1.

Delegaţia Societăţii:

Al. Bunescu, C. Malcoci şi O. Ţino.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
acordarea premiului „Vasile Conta“ pe anul 1929

S'a prezentat o singură lucrare cu titlul „*Asupra principiilor mecanice relativiste*“ de către D-l Gh. Pick licenţiat în matematici şi preparator la Institutul de Fizică teoretică la Universitatea din Cluj.

Lucrarea este un rezumat al unei monografii expuse la institutul pentru învăţământul matematicilor la Universitatea din Cluj şi coprinde trei părţi:

1. *Introducerea* care arată necesitatea axiomatizării diferitelor discipline ştiinţifice.

2. *Principiile geometriei*, în care se stabilesc axiomele fundamentale asupra bazei logice a geometriilor neeuclidiene.

3. *Aplicaţiile geometriei neeuclidiene la mecanică* unde se încearcă o axiomatizare a fizicii. Aci se arată filiaţiunea strânsă între geometria neeuclidiană şi mecanica relativă. Se insistă mai ales asupra generalizării noţiunii de forţă în mecanica cea nouă. Aceasta e partea cea mai însemnată din lucrare.

Manuscrisul e rodul unei munci conştiincioase în domeniul filosofiei matematice şi reprezintă un început bun de activitate în această direcţiune. Lucrarea este meritorie. Ordinea în care sunt expuse ideile dovedeşte o bună orientare în treburile filosofiei ştiinţifice.

Ca orice început, mai ales în acest domeniu delicat, lucrarea nu conţine lucrări originale, dar închegarea lor aparţine autorului. Limbajul este uneori impropriu şi argumentarea afirmaţiunilor prea literar făcută. Dacă s'ar indică în text isvoarele unor anumite afirmaţiuni, de sigur că nu ar mai fi nevoie de alte desvoltări.

Suntem de părere să se acorde D-lui Gh. Pick premiul „Vasile Conta“ pe anul 1929 — şi, dacă posibilităţile tipografice o permit, — să se publice lucrarea în *Gazeta Matematică*. In acest din urmă caz se impune o mică revizuire şi indicare a isvoarelor, precum şi lămurirea unor noţiuni. Stăm cu plăcere la dispoziţiunea autorului pentru precizări.

Comisiunea pentru premiul «Vasile Conta».

O. Onicescu, P. Sergescu, I. Vardala.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea generală extraordinară din 30 Octomvrie 1929.

NOTE MATEMATICE

11. *Généralisation du Problème 3615.* (*Gazeta Matematica*, XXXV, p. 28). Soient P un point du plan d'un triangle ABC, B' et C' les points où BC rencontre les parallèles à PB et PC, menées par A ; les droites PB' et PC' rencontrent respectivement AB et AC en D et E. *Les points* D *et* E *sont alors sur une parallèle à* BC *et la distance* d_a *de* DE *à* BC *résulte de la relation*

$$(1) \qquad \frac{1}{d_a} = \frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{h_a}.$$

où δ_a *est la distance de* P *à* BC *et* h_a *la hauteur du triangle issue de* A (les distances d_a, δ_a, h_a sont comptées de D, P, A vers BC).

On a, en effet,

$$\frac{h_a}{d_a} = \frac{BA}{BD} = \frac{BD + DA}{BD} = 1 + \frac{B'A}{BP} = 1 + \frac{h_a}{\delta_a},$$

ce qui donne immédiatement la relation (1).

On remarquera que, si d_b et d_c, δ_b et δ_c, h_b et h_c représentent les segments analogues à d_a, δ_a, h_a, correspondant aux côtés AB et AC, on a

$$(2) \qquad \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} + \frac{1}{\delta_c} + \frac{1}{r},$$

r étant le rayon du cercle inscrit à ABC.

Dans la question 3615, P est le centre du cercle inscrit, et la relation (1) donne

$$\frac{1}{d_a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{h_a} = \frac{p}{S} + \frac{a}{2S} = \frac{2p + a}{2S};$$

puis (2) devient

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{4}{r}.$$

Quand P est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle Â et, si r_a désigne le rayon de ce cercle, on a

$$\frac{1}{d_a} = -\frac{1}{r_a} + \frac{1}{h_a} = \frac{a - p}{S} + \frac{a}{2S} = \frac{2a - b - c}{2S},$$

et (2) donne

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}=-\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)+\frac{1}{r}=0.$$

Enfin, si P est un point quelconque de la droite joignant les pieds des bissectrices extérieures, on a

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}=\frac{1}{r}.$$

R. GOORMAGHTIGH.

12. *Pătraţi de plumb.* Referitor la o „*Mărturie hotarnică*“ din 18 Iulie 1799, THEODOR CODRESCU pune în „*Uricarul*“ Vol. XV următoarea notă :

„*Această copie hotarnică coprinde şi palma domnească, cum s'au măsurat, cu stânjinul gospod moşia Tocsobenii ; ea este de 15½ pătrăţi de plumb*“.

La finele articolului „*Cercetarea moşiei Manzăştii*“ găsim nota următoare :

„*Această cercetare despre dispărţirea moşiei Manzăştii de către moşia Bereştii este scrisă pe hârtie mare zisă turcească. Palma cu care s'a făcut această măsurătoare este de 13 şi 1/4 fedranţi de plumb*“.

La finele unei „*Mărturii hotarnice*“ pentru Monastirea Floreştii din Tutova, găsim nota :

„*Cartea aceasta de hotărnicie cuprinde şi palma domnească din 16 pătraţi de plumb*“.

De aci se vede că în primul caz, ca şi în ultimul, este vorba de stânjini gospod, iar în al doilea de stânjini proşti. Diferenţa dintre aceşti stânjini am arătat-o în Nota matematică Nr. 29 din *Gazeta Matematică* Volumul XXXIII, pag. 209.

In lipsă de instrumente de măsură exacte şi verificate, hotarnicii de pe vremuri desemnau pe planurile sau hărţile lor, lungimea palmei cu care alcătuiau stânjinii şi apoi funiile. Tot din pricina lipsei de măsuri etalonate, TH. CODRESCU măsoară lungimile acelor palme cu unităţi tipografice. După dânsul ar eşi că raportul între stânjinul prost şi cel domnesc este 13,25/15,5 = 0,851 faţă de palma din primul act şi 13,25/16 = 0,828 faţă de palma din ultimul act, pe

când — după cum am arătat în nota mai sus menţionată — oficialitatea a stabilit mai în urmă raportul $7/8 = 0{,}875$. Comparând lungimile palmelor domneşti din primul şi ultimul act, se vede că ele nu sunt identice. Unităţile de măsură nu erau invariabile şi de aci o cauză continuă de certuri pentru mărimea locurilor şi a moşiilor.

I. Ionescu.

*13. *Asupra problemei 3202.* Cu drept cuvânt D-l I. Ionescu observă în nota No. 31 din vol. XXXIV că soluţiunile problemei nu sunt complecte.

Impresia că numărul 1111 este prim — deşi uşor se poate constata contrariul — m'a oprit să fac descompunerea: $1111 = 11 \times 101$, cari ar fi condus uşor la soluţiile:

$$56^2 - 1111 = 45^2 \text{ şi } 67^2 - 3333 = 34^2.$$

Deasemenea pentru cazul numerelor de 6 cifre, făcând în cazurile:

$A+B$	$231.a$	$273.a$
$A-B$	481	407
a	>2	$\geqslant 2$

pe $a = 3$ găsim şi soluţiile:

$$587^2 - 333333 = 106^2 \text{ şi } 613^2 - 333333 = 206^2.$$

Observare. In „Nota No. 31“ se dă drept soluţie şi:

$$346^2 - 111111 = 85^2$$

dar primul membru nu este patrat perfect, având valoarea 8605.

Această observaţie se datoreşte şi D-lui Şerban V. D-tru care ne-a comunicat-o.

Căpitan I. Linteş.

*14. *Asupra „Notei No. 11 din vol. XXXIV“.* La „condiţia III-a“ s'a luat din eroare $n > p$, în loc de $n < p$ cum este în articolul *„O problemă cu indicatori“*, şi s'a ajuns astfel la concluziuni false.

Căpitan I. Linteş.

15. *Asupra teoremei lui* CARNOT. Pe laturile triunghiului ABC luăm perechile de puncte A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2. Aceste puncte vor fi pe o conică dacă îndeplinesc relaţiunea lui CARNOT :

$$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} = 1.$$

Considerăm exagonul $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. După reciproca teoremei lui PASCAL, condiţiunea ca el să fie înscris în o conică e ca intersecţiile (C_1B_2, CB), (A_1C_2, AC), (B_1A_2, BA) pe care le vom notà cu A', B', C', să fie colineare.

In acest caz, după teorema lui MENELAUS, avem :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Insă triunghiul ABC tăiat de transversala C_1B_2A' ne dă :

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B_2A'}{B_2C} \cdot \frac{C_1A'}{C_1A} = 1.$$

Dacă scrim alte două relaţiuni analoage pentru transversalele A_1C_2B' şi B_1A_2C' şi înmulţim cele patru relaţiuni obţinute, se găseşte tocmai relaţia lui CARNOT dată la început.

M. VAL.

16. *Asupra Notei 40.* In *Gazeta Matematică* No. 10, Iunie 1929 D-l ALEXANDRU AL. ROŞU studiază sub titlul „Un loc geometric" — problema lui PAPPUS — „Printr'un punct din planul unui unghiu se pot duce patru drepte de lungime dată, sprijinindu-se pe laturile unghiului" şi D-sa îşi „propune" să arăte că „punctele ce împart aceste drepte în acelaş sens în raportul m/n se găsesc pe un cerc».

Metoda analitică, foarte elegantă (afară de o mică scăpare din vedere în ceeace priveşte $MC/MB = -m/n$) conduce la relaţia

$$n^2 (m+n)^2 x^2 + m^2 (m+n)^2 y^2 + 2mn (m+n)^2 xy \cos\theta$$
$$- 4 a y m^2 n (m+n) \cos\theta - 4 bx m n^2 (m+n) \cos\theta = l^2 m^2 n^2$$

verificată de coordonatele punctelor M.

D-l Roşu face „substituţia“

$$nx = X \quad ; \quad my = Y \text{ şi deduce}$$

$$(3) \quad X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta - 4bX\frac{mn}{m+n}\cos\theta - 4aY\frac{mn}{m+n}\cos\theta = \frac{l^2 m^2 n^2}{(m+n)^2}$$

ecuaţie ce crede D-sa că reprezintă un cerc, fapt inexact dacă $m \neq n$; căci nu se ţine seamă că ecuaţia (3) este raportată la axele O X, O Y care în general nu fac între ele unghiul θ.

Se stabileşte apoi că semi-parametrul parabolei Pa este : S^2/ma^3.

A se vedeà : „Journal de Mathématiques spéciales“ 1890, pag. 149 şi Journal de Mathématiques élémentaires“ 1890, p. 149. Pentru cei cari doresc să cunoască deaproape aceste chestiuni citäm din articolul lui H. Brocard (J. M. S. 1885,16) „Ces six paraboles et leurs propriétés focales ont été édutiées pour la 1ère fois par H. A. Artzt, dans un programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen, édité au commencement de l'année 1884 et intitulé : „Untersuchungen über ähnliche Punktreichen auf den Seiten eines Drieicks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über congruente Strahlenbüschel aus der Ecken desselben ; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardischen Kreises“.

Insă e mai uşor de consultat „Traité de Géométrie“ de Rouché şi Comberousse tome II, pag. 636, problema No. 8.

Valeriu Manafu
Lycée „St. Louis“

17. *Asupra problemei No. 3769.* Problema 3769 propusă de D-l I. Nicolau-Dobridor în numărul 8 al „*G. M.*“ este cunoscută. In adevăr, parabolele D-lui Nicolau nu sunt altceva decât parabolele lui Artzt ale căror focare sunt vârfurile celui de al doilea triunghiu al lui Brocard şi prin urmare se găsesc pe simediane.

In „Journal de Mathématiques Spéciales“, 1890, p. 149, G. Longchampsr reaminteşte următoarele proprietăţi deja cunoscute la acea dată : (P_a este parabola tangentă în B şi C — laturilor AB, AC — iar M, mijlocul lui BC).

1°. P_a trece prin mijlocul lui AM.

2°. Tangenta în acest punct este dreapta B'C' obținută unind mijlocul lui AB cu mijlocul lui AC.

3. Focarul ei, F, aparține cercului circumscris triunghiului A'B'C' (teorema lui LAMBERT).

4°. F *aparține asemenea simedianei vârfului* A (teorema lui PONCELET).

5°. Proectând F pe laturile AB, AC se obține două puncte H, H'; HH' este tangenta în vârf.

Pentru o convingere mai rapidă să facem $\theta = \frac{1}{2}\pi$, găsim în raport cu vechile axe ecuația:

$$n^2(m+n)^2x^2 + m^2(m+n)^2y^2 = l^2m^2n^2,$$

care, evident, nu reprezintă un cerc decât dacă $m = n$.

Concluziile trase pentru cazul general sunt deci inexacte, rămâne însă eleganta soluție analitică a cazului particular ($m = n$) găsit deja de STEINER. (Mathesis 1889 pag. 193).

VALERIU MANAFU
Licée „St. Louis".

18. *Sisteme de curbe.* Dacă se consideră m curbe de grad n, în același plan, de ecuații punctuale:

$$C_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

ecuația:

$$(1) \qquad C_1 + \sum_{2}^{m} \lambda_{i-1} C_i = 0$$

reprezintă ecuația unui *sistem punctual de curbe de ordinul* $m-1$, căci depinde de $m-1$ parametri.

Vreau să enunț mai jos o teoremă generală asupra acestor sisteme de curbe.

Se știe că generalizarea polarei la conice, este în cazul curbelor de grad n, reprezentată de polarele de ordin 1, 2, ... $n-1$, ale unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ față de aceste curbe.

Polarele de ordin p, ale punctului M, față de curbele $C_i = 0$ au ecuațiile punctuale:

$$(2) \qquad [x'_0C'_{ix} + y_0C'_{iy} + z_0C'_{iz}]_{(p)} = 0,$$

în care indicele de jos reprezintă operația derivării de p ori.

Desvoltarea ecuației (2) ne va dà o ecuație de forma:

$$(3) \qquad \sum AC^{(p)}_{ix^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}} = 0.$$

Dacă scrim sistemul de ordin $m-1$ determinat de polarele (3), față de toate curbele C_i, obținem o ecuație de forma:

$$S\lambda_{i-1} \sum AC^{(p)}_{ix^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}} = 0,$$

sau

$$(4) \qquad S[\sum A\lambda_{i-1}C^{(p)}_{ix^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}}] = 0.$$

Observând proprietatea de adunare a derivatei, (4) se scrie

$$[x_0 S\lambda_{i-1}C'_{ix} + y_0 S\lambda_{i-1}C'_{iy} + z_0 S\lambda_{i-1}C'_{iz}]_{(p)} = 0.$$

Ecuația ultimă ne reprezintă tocmai polara de ordin p a punctului $M(x_0, y_0, z_0)$ față de sistemul de ordin $m-1$ de curbe de grad n.

De aci rezultă imediat teorema:

Sistemul de ordin m — 1 *al polarelor de ordin* p *ale unui punct, față de* m *curbe de grad* n, *cuprinde toate polarele de ordin* p *ale punctului considerat, față de sistemul de ordin* m — 1 *al celor* m *curbe de grad* n.

Această teoremă generalizează o teoremă asupra rețelelor de conici.

L-t. Mihail I. Focșeneanu
din Șc. Milit. de Artilerie
Timișoara.

19. *Asupra unei iperbole în legătură cu triunghiul.* Iperbola pe care a studiat-o D-l Inginer M. Nicolau în *Gazeta Matematică*, Anul XXVII pag. 347, a întâlnit-o De Longchamps, în chestiunea care e reprodusă în *Exercices de mécanique par F. J.* sub Nr. 1429, și anume:

„Să se găsească locul punctului M *care este în linie dreaptă cu reciprocul și inversul său. Să se verifice că acel loc trece prin centrul de greutate, prin centrul cercului înscris și prin asociatele algebrice ale fiecăruia din aceste puncte.*

Eub. I. Ballan.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL DE ADMITERE ÎN ANUL PREPARATOR AL ŞCOALEI POLITECNICE DIN BUCUREŞTI

(21, 22 şi 23 Octomvrie 1929)

ARITMETICA

1. Din fracţia 840/108 se scade o fracţie care are numărătorul 100. Care este numitorul fracţii scăzătoare, ştiind că restul e uu număr întreg, şi care e acel rest ?

2. Care este capacitatea minimă în decalitri a unui butoiu, care ar conţine un număr exact de vedre, fie de Muntenia, fie de Moldova? Vadra aveà în ambele ţări 10 ocale, iar ocaoa de Muutenia echivalà cu 1,288 litri şi cea de Moldova 1,52 litri.

Câte ocale greutate de apă ar intrà în acel butoiu, ştiind că ocaca de greutate aveà 1,27186 kg. în Muntenia şi 1,291 kg. în Moldova?

3. O bancă dă 6% dobândă la sumeie ce i se depun spre fructificare, însă dobânda curge numai dela 1 ale lunii care urmează lunii în care se face depunerea ; şi ia 15% dobândă la orice sumă împrumutată de bancă, dobânda fiind datorită din ziua în care se face împrumutul. Dobânzile cuvenite particularilor nu se adună la capital, nici cele datorite băncii nu se scad din capital decât la finele anului, sau la lichidarea contului.

In aceste condiţiuni o persoană a depus anul acesta la acea Bancă 175.000 lei la 3 Ianuarie ; apoi 6.500 lei la 25 Ianuarie ; a luat dela Bancă 9.000 lei la 16 Fevruarie; a depus 6.000 lei la 26 Fevruarie ; a luat 30.000 lei la 13 Martie ; a depus 3.000 lei la 29 Martie şi alţi 12.000 lei la 16 Aprilie.

Care ereà situaţiunea contului pe ziua de 1 Iunie?

(Toate chestiunile sunt obligatorii).

GEOMETRIA

Se dau două cercuri O şi O' care se taie în punctele A şi B. Se duce prin A o secantă arbitrară care întâlneşte cercul O în P şi cercul O' în P'. Pe mijlocul segmentului de dreaptă PP' se ridică o perpendiculară, care taie coarda comună AB în I. Dreptele IP şi IP' mai taie cercurile date O şi O' în punctele Q şi Q'.

1. — Să se demonstreze că IQ = IQ'.

2. — Să se deducă de aci că QQ' e paralelă cu PP'.

3. — Dreapta QQ' mai taie cercul O în R şi cercul O' în R'. Să se dovedească relaţiile :

$$PQ = AR = AR' = P'Q', \quad Q'R = AP', \quad QR' = AP.$$

4. — Să se determine locul centrului cercului circumscris triunghiului BPP', când secanta PP' se învârteşte în jurul punctului A.

5°. — Să se găsească locul punctului comun bisectoarelor interioare ale aceluiaş triunghiu.

ALGEBRĂ

I. Se consideră polinoamele :

(1) $$y(x) = (x-2) - \frac{3}{2}$$

(2) $$Y(x) = (x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{3}{2};$$

se notează pentru prescurtare, cu $y(a)$ rezultatul înlocuirii în polinomul $y(x)$, a lui x prin cătimea a; în mod analog, se însemnează cu $Y(a)$, rezultatul înlocuirii în polinomul $Y(x)$, a lui x prin a.

Se cere:

1) Să se arate că dacă x' şi x'' sunt rădăcinile ecuaţii $Y(x) = 0$, avem relaţia :

$$y(x') + y(x'') = 0.$$

2) Să se arate că însemnând cu m un număr oarecare, pozitiv sau negativ, avem relaţiile:

$$y\left(\frac{7}{2}+m\right) + y\left(\frac{7}{2}-m\right) = 0$$

$$Y\left(\frac{7}{2}+m\right) - Y\left(\frac{7}{2}-m\right) = 0.$$

3) Să se reprezinte grafic, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, funcţiunile $y(x)$ şi $Y(x)$ de mai sus, când x variază între 2 şi 5.

II. Să se demonstreze că ecuaţia

$$(x-2) - \frac{3}{2} + k \cdot \left[(x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{3}{2}\right] = 0$$

în care k este un număr oarecare, pozitiv sau negativ, are rădăcinile reale, oricare ar fi numărul k.

Să se arate că una din aceste rădăcini este cuprinsă între rădăcinile x' şi x'' ale ecuaţiei:

$$(x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{3}{2} = 0.$$

(Toate chestiunile de mai sus sunt obligatorii).

TRIGONOMETRIA

I. Să se calculeze distanţa c dintre două puncte A şi B, cunoscând distanţele punctelor A şi B la un punct C şi unghiul ACB; să se calculeze de asemenea distanţa lui C la direcţia AB. Aplicaţie: $CB = a = 245{,}36$ m. $CA = b = 172{,}28$ m. unghiul $ACB = 108°36'30''$.

II. Intr'un triunghiu ABC se dă:

$$\sin B = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin C = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

să se calculeze; $\sin(B+C)$, $\sin(B-C)$ şi $\cos(B-C)$, să se deducă care sunt unghiurile triunghiului.

III. Fie ABCD un patrulater oarecare, prin A se duc segmentele AE egal şi paralel cu latura BC, AF egal şi paralel cu latura CD; să se arate că avem:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cos BAE + 2\overline{AB}\cdot\overline{AF}\cos BAF + 2\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cos EAF.$$

COMPOZIŢIE DIN ŞTIINŢELE FIZICO-CHIMICE ŞI NATURALE

Rolul apei în natură din punct de vedere al ştiinţelor fizico-chimice şi naturale.

(Pentru toate chestiunile timpul acordat a fost de $3^1/_2$ ore).

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul XII. No. 3. Bucureşti 1929. Sur les formules de transformation qui définissent des mouvements, par D. Pompeiu. Les conquences conjuguées, par C. Popovici.

Mathesis. Tomul XLIII. No. 7. Iulie 1929. Gembloux. (Belgia). Asupra homografiilor spaţiale neavând decât două drepte unite, de L. Godeaux. O teoremă asupra a două poligoane de p laturi, de R. Deaux. Proectivitate şi ecuaţii algebrice, de P. Libais. Asupra unei suprafeţe cuartice riglate admiţând o cubică strâmbă propriu zisă ca linie dublă, de M. Deweck. Asupra teoremei lui Desargues-Sturm.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CVIII. Fascicula II. August 1929. Buenos-Aires. Asupra funcţiunilor egal continui de mai multe variabile reale, de T. C. Viguaux.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CVIII. Fascicula III. Septemvrie 1929. Buenos-Aires. Azimut prin elungaţiuni circummaxime (pentru distanţe zenitale), de J. S. Corti. Filosofia în şcoală, de J. Sescosse. Emile Borel, de C. C. D.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'École polytechnique de Bucarest. I-ère Année No. 1. Bucarest Imprimerie de l'État. 1929. Remarque sur le théorème de Rouché, par P. Sergesco. Sur le théorème des accroissements finis, par E. Abason. Sur les groupes para-

métriques des groupes fonctionels, par Gr. Moisil. Le cas d'exception de certaines propriétés quadratiques, par D. Barbilian. Sur certaines propriétés quadratiques, par G. Tzitzeica. Sur la structure des formules en physique et le sens intime des lois de similitude, par D. Germani. Sur le potentiel des métaux dans les liquides purs, par Er. Toporescu. Brachistrochrone d'un mobile entrainé par un milieu fluide en mouvement par Al. Froda. Sur l'emploi des méthodes fonctionelles dans la mécanique, par O. Onicescu, La répartition des efforts tranchants dans une file de rivets, par I. Ionescu. Sur la condition des vitesses dans un fluide incompressible, par D. Pompeiu. Sur le centrage des avions, par E. Carafoli. Dynamique du galvanomètre à cadre mobile avec condensateur et selfinduction aux bornes, par N. Vasilesco-Karpen. Quelques considérations, sur le rôle physique des puissances instantanées dans un système de production et de distribution d'énergie électrique, par C. Budeanu. Sur la variation de l'impédance équivalente d'une ligne de transmission en haute fréquence, par Tănăsescu T. Caractéristiques des lignes de transmission télégraphiques, par I. Constantinescu. † Traian Lalescu, par E. Abason. Informations.

(Tout ce qui concerne la rédaction et l'administration de ce Bulletin doit être adressé a M. Ernest Abason, maitre de conférences à l'École Polytechnique de Bucarest, 20 Str. Justinian II. Bucarest).

Boletin matematico. Anul II. No. 8. August 1929. Buenos-Aires. Problema compunerii algebrice şi extensiunile ei posibile, de E. T. Bell.

Journal de Mathématiques élémentaires. Anul 54. No. 1. Octomvrie 1929. Paris.

Idem. No. 2. Octomvrie 1929. Paris.

Revista Stiinţifică. „V. Adamachi". Vol. XV. No. 2 3. Septemvrie 1929. Iaşi. Paternitatea calculului diferenţial, de M. Gh. Dumitrescu.

N. Donici. *Al treilea congres al comisiunii astronomice internaţionale ţinut la Leiden (Olanda)* dela 5 la 15 Iulie 1928 (Extras din Memoriile ştiinţifice al Academiei Române). Bucureşti 1929.

R. Goormaghtigh. *Sur les seize sphères tangentes à une sphère et à trois plans donnés.* (Extras din *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 4-e série, t. XVII Ianuarie 1917).

R. Goormaghtigh. *Sur un problème concernant des groupes de points sur l'hyperbole équilatère.* (Extras din *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 4-e série. t. XVIII, Decemvrie 1918).

R. Goormaghtigh. *Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de* Cesàro. (Extras din *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 4-e série, t. XVIII, Decemvrie 1918).

R. GOORMAGHTIGH. *Sur l'orthopole.* (Extras din *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4-e série, t. XIX, lanuarie 1919.

R. GOORMAGHTIGH. *The orthopole.* (Extras din *The Tôhoku Mathematical Journal.* Vol. 27. No. 1—2. Iulie 1926 Sendai, Japonia).

R. GOORMAGHTIGH. *Propriétés nouvelles des triangles spéciales.* (Extras din *Mémoire de la Société royale des sciences de Liège).* Bruxelles 1925),

R. GOORMAGHTIGH. *Etude géométrique des courbes de* CESÀRO.

R. GOORMAGHTIGH. *Généralisation de* CORUN *relative aux caustiques.*

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une théorème du calcul des différences.*

R. GOORMAGHTIGH. *Curiosité arithmétique. Abaque du calendrier perpétuel.*

R. GOORMAGHTIGH. *Sur l'orthopole et sur un théorème de* MORLEY.

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une généralisation au tétraèdre du théorème de* NOYER-DROZ-FARNY.

R. GOORMAGHTIGH. *Sur les normales d'une courbe plane.*

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une généralisation des points de* BROCARD.

R. GOORMAGHTIGH. *Sur les strophoïdales.*

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une démonstration analytique de T.* LEMOINE *relatif à l'orthopole.* (Extras din *Mathesis*).

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une généralisation du théorème de* JAMET *relatif aux courbes triangulaires symétriques.* (Extras din *Mathesis,* Aprilie 1924),

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une quintique circulaire.* (Extras din *Mathesis.* Aprilie 1927).

R. GOORMAGHTIGH. *Sur une classe de courbes planes.* (Extras din *Mathésis*, Iulie 1927).

R. GOORMAGHTIGH. *Sur les normales aux coniques et les triangles podaires.* (Extras din *Mathesis*, Octomvrie 1927).

R. GOORMAGHTIGH. *Sur un théorème relatif au triangle.* (Extras din *Mathesis*, Decemvrie 1927).

R. Goormaghtigh. *Généralisation de théorèmes de* Neuberg *et de* Gob. (Extras din *Mathesis*, Ianuarie 1928).

R. Goormaghtigh. *Sur les théorèmes de* Kiepert *et de* Karya. (Extras din *Mathésis*, Fevruarie 1928).

R. Goormaghtigh. *Sur les cercles et les sphères remarquables du triangle et du tétraèdre*, (Extras din *Mathesis*, Martie 1928).

R. Goormaghtigh. *Sur le lieu des poles des spirales sinusoïdes d'indice donné osculant une courbe donnée.* (Extras din *Mathesis*, Mai 1928)

L. Penenjkevici. **Două enigme în teoria numerelor.** *Pentru deslegarea uneia s'a înființat premiul de 100.000 mărci. Cea de a doua rămâne nedeslegată de 2000 ani. Studiul este accesibil persoanelor cu cunoștințe matematice secundare, cuprinzând binomul lui* Newton *și triunghiul lui* Pascal. (In limba rusă). Cetatea Albă. Tipografia economică *P. C. Caratodorov.* 1929. Prețul 12 lei.

Autorul acestei broșuri mici, de 19 pagini, format 13×20, este cunoscut cititorilor *Gazetei Matematice* prin un articol „*Asupra ecuației pitagorice* $z^2 = y^2 + x^2$", publicat în Anul XXX pag. 14 și 89 și altul „*Asupra puterilor numerelor întregi*" publicat în Anul XXXII pag. 443. Ca o continuare a studiilor din acele articole autorul publică broșura de mai sus, în limba rusă, pe care D-ra elevă-inginer Sofia Gausfain a binevoit a ne-o traduce în întregime în limba română, traducere după care fac această recenziune.

Autorul urmărește prin acest studiu mijloace de a demonstrà ultima teoremă a lui Fermat [1]). Acest celebru »*Divus Arithmeticus*", cum îi ziceà Edouard Lucas a afirmat categoric, fără a dà demonstrația, că ecuația:

$$z^n = x^n + y^n \qquad (1)$$

este imposibilă în numere întregi pentru $n > 2$. Cu toate marile sforțări făcute de cei mai însemnați matematiciani ai lumei, această afirmațiune, – timp de cam 300 de ani de când s'a făcut, — nu a fost nici demonstrată, nici infirmată. Paul Wolfskehl, ca să o scoată dela ordinea zilei, a înființat un premiu de 100.000 mărci aur celui ce o va scoate dela ordinea zilei într'un fel sau într'altul. Mirajul acestei sume a creiat în secolul actual clasa *fermatiștilor*, cum ereà prin secolele trecute aceea a trisectorilor unghiului, a duplicatorilor cubului sau a cuadratorilor cercului. Erorile fermatiștilor sunt numeroase. (A se vedeà *Gazeta Matematică*, Anul XV pag. 178; Anul XVI pag. 452. Anul XVII pag. 142). Cei mai mulți conchid fenomene aritmetice, din studii și proprietăți algebrice. In această categorie este și autorul broșurii mai sus arătate.

---

1) A se vedeà pentru istoricul acestei chestiuni articolul pe care l'am publicat în revista „*Natura*" Anul IV, Octomvrie 1908, pag. 3.

I. I.

Broşura începe cu *„Istoricul şi conţinutul problemei lui* FERMAT". Sunt aci câteva afirmaţiuni nejuste. Aşa se atribuie lui FERMAT rezolvarea chestiunii numerelor pitagorice, când de fapt problema ereà cunoscută complet matematicienilor greci în anticitate; i se atribuie rezolvarea ecuaţii de gradul III, pe care însă o obţinură matematicienii italieni cu un secol înainte; i se atribuie traducerea unor opere greceşti din anticitate, când el s'a servit de traducerea lui CLAUDE BACHET a aritmeticei lui DIOPHANTE, pe care a redactat-o apoi S. FERMAT, fiul lui P. FERMAT cu notele rămase de la tatăl său. Autorul arată în istoric că studiul ecuaţiei (1) se poate reduce la cazul n prim. Istoricul se termină cu arătarea că numerele prime se cern şi azi cu cursul lui ERECTOSTHENE, şi că până azi nu s'au găsit formule care să deà numerele prime.

Partea doua a broşurii poartă titlul: *„Despre puterile numerelor în legătură cu numerele din triunghiul lui* PASCAL *şi despre numerele prime"*.

Se porneşte dela egalitatea (1) dată în *Gazeta Matemetică*. Anul XXXII pag. 443 şi dela observaţiunile făcute acolo. Formula este aceasta:

$$x^{2n-1} = A_1 C_x^1 + A_2 C_{x+1}^3 + A_3 C_{x+2}^5 + \ldots + A_{n-1} C_{x+n-1}^{2n-1} \pm A_{n-1} \qquad (2)$$

în care A_i nu depinde de x, ci numai de n. Dacă în loc de x punem z şi scădem găsim:

$$z^{2n-1} = A_1 C_z^1 + A_2 C_{z+1}^3 + \ldots \pm A_{n-1} \qquad (3)$$

şi prin scădere scoatem:

$$z^{2n-1} - x^{2n-1} = A_1 \left(C_z^1 - C_x^1 \right) + A_2 \left(C_{z+1}^3 - C_{x+1}^3 \right) + \ldots \qquad (4)$$

Restul demonstraţiei se bazează pe arătarea că (4) nu se poate pune sub forma (1) şi se conchide că în anumite cazuri teorema lui FERMAT este adevărată. Aci stă partea slabă a demonstraţiei. Am arătat şi cu altă ocaziune că aritmetica este rebelă teoremelor algebrice. Relaţiunile algebrice sunt generale. Aşa de exemplu $(x^m + a^m)$ nu se împarte cu $(x - a)$ dar $(4^3 + 2^3)$ se împarte cu $(4 - 2)$! În algebră nu putem aveà egalitatea sumelor,

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

decât dacă $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$; în aritmetică însă $a=3$, $b=4$, $c=5$, $a'=1$, $b'=9$. $c'=3$, $x=2$ verifică egalitatea. Din faptul că (4) nu ss poate identifică cu (2) nu reese de loc că s'a demonstrat teorema lui FERMAT, căci unii termeni din (4) pot fi mai mici ca aceia ce le corespund în (2) alţii mai mari şi suma să iasă la fel. Acest lucru nu e de loc arătat şi fără el demonstraţia nu e valabilă.

Autorul încheie broşura de altfel spunând că în unele cazuri raţionamentul *„ne apropie de demonstrarea generală a teoremei"*.

Broşura nu conţine nimic despre numerele prime cum arată titlul părţii II.

I. IONESCU.

CL. SERVAIS. *Sur le géométrie du tétraèdre.* (Extras din *Bulletin de la Classe des Sciences royale de Belgique.* Supliment la *Mathesis*). Bruxelles 1929.

MIHAÏL MANOÏLESCO. *Théorie du protectionisme et de l'echange international.* (Bibliothèque internationale d'Economie politique, publié sous la direction de ALFRED BONNET). Paris, 5-e. Marcel Giard. Prix 50 francs. 1929.

(In numărul viitor va apare o recenziune).

CERERI.

183. In urma concursului de admitere în Anul preparator al Şcoalei politecnice din Bucureşti un părinte al unui candidat m'a rugat să pun chestiunea înfiinţării de cursuri serale de pregătire matematică, aşa ca să nu mai fie nevoie de un an de pregătire special pentru anii preparatori!

Chestiunea e pusă.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLBMA 3165. *Fie* A', B', C' *picioarele înălţimilor unui triunghiu oarecare* ABC *şi* H *ortocentrul său. Pe înălţimi se iau dela* A', B', C' *spre* H *respectiv lungimile* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *astfel ca:*

$$A'A_1 : AA' = B'B_1 : BB' = C'C_1 : CC' = K.$$

Se cere să se găsească suprafaţa triunghiului $A_1B_1C_1$ *în funcţiune de elementele triunghiului* ABC *şi de raportul* K *şi să se determine* K *astfel ca suprafaţa triunghiului* $A_1B_1C_1$ *să fie maximă.* (enunţ rectificat [1]).

OCTAV ORĂNESCU.

Soluţie. Fie S aria triunghiului ABC şi h_a, h_b, h_c înălţimile sale. Să însemnăm cu S_1 aria triunghiului $A_1B_1C_1$ şi fie (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) coordonatele normale absolute ale vârfurilor sale.

Se ştie că aria $A_1B_1C_1$ este dată de formula

$$\frac{A_1B_1C_1}{ABC} = \frac{1}{h_a h_b h_c} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Cu ajutorul figurei, găsim că, oricare ar fi valoarea lui K şi forma triunghiului ABC, coordonatele normale ale punctelor A_1, B_1, C_1 sunt

[1]) A se vedeà *G. M.* Vol. XXXI p. 238.

$$A_1\begin{cases} x = Kh_a \\ y = (1-K)h_a \cos C \\ z = (1-K)h_a \cos B \end{cases} \qquad B_1\begin{cases} x_1 = (1-K)h_b \cos C \\ y_1 = Kh_b \\ z_1 = (1-K)h_b \cos A \end{cases}$$

$$C_1\begin{cases} x_2 = (1-K)h_c \cos B \\ y_2 = (1-K)h_c \cos A \\ z_2 = Kh_c\,. \end{cases}$$

Inlocuind în (1), obţinem

$$\frac{S_1}{S}\left|\begin{array}{ccc} K & (1-K)\cos C & (1-K)\cos B \\ (1-K)\cos C & K & (1-K)\cos A \\ (1-K)\cos B & (1-K)\cos A & K \end{array}\right|.$$

Dacă desvoltăm determinantul şi punem pentru prescurtare

$$\lambda = \cos A \cos B \cos C,$$

găsim

$$S_1 : S = 2(1+\lambda)K^2 - (1+4\lambda)K + 2\lambda. \qquad (2)$$

Trinomul în K

$$f(K) = 2(1+\lambda)K^2 - (1+4\lambda)K + 2\lambda \qquad (3)$$

are întotdeauna rădăcinile sale reale. Fie K' şi K'' aceste rădăcini (K' < K'').

Pentru K = K' şi K = K'' aria S_1 este nulă, iar punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare. In adevăr, punctele A_1, B_1, C_1 nu pot coincide decât în cazul când ele s'ar confunda cu ortocentrul H. In acest caz ar trebui să avem

$$HA' : AA' = HB' : BB' = HC' : CC' = K,$$

relaţiuni cari atrag condiţia ca triunghiul ABC să fie echilateral.

Dacă convenim că pentru valorile negative ale lui K segmentele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ să fie duse respectiv cu începere dela A', B', C' pe prelungirile înălţimilor, în direcţie opusă vârfurilor A, B, C, iar pentru K pozitiv în spre vârfuri (ca în enunţ), atunci când K variază dela $-\infty$ la $+\infty$ avem următorul tablou în privinţa valorilor lui S_1:

K =	$-\infty$	0	K'	K	K''	$+\infty$
S_1 =	$+\infty$	$2\lambda S$	0	S_1	0	$+\infty$

S_1 are deci un maximum pentru o valoare a lui K cuprinsă între K' şi K''.

Observăm însă că pentru K < K' şi pentru K > K'' sensurile de rotaţie ABC, $A_1B_1C_1$ sunt aceleaşi, iar pentru K' < K < K''

sensurile de rotaţie ABC, $A_1B_1C_1$ sunt inverse. Deci pentru valorile lui K cuprinse între K' şi K'' aria S_1 fiind negativă, raportul între ariile S_1 şi S este

$$S_1 : S = -2(1+\lambda)K^2 + (1+4\lambda)K - 2\lambda. \qquad (4)$$

Avem de studiat deci variaţia funcţiunei

$$u = -2(1+\lambda)K^2 + (1+4\lambda)K - 2\lambda.$$

Dacă luăm derivatele, obţinem

$$u' = -4(1+\lambda)K + 1 + 4\lambda$$
$$u'' = -4(1+\lambda) < 0.$$

Derivata a doua fiind negativă, avem un maxim pentru

$$K_1 = \frac{1+4\lambda}{4(1+\lambda)}. \qquad (5)$$

Acest maximum este

$$S.\frac{1-8\cos A\cos B\cos C}{8(1+\cos A\cos B\cos C)}. \qquad (6)$$

In cazul când triunghiul ABC are un unghiu obtuz, trinomul (3) are rădăcina cea mai mică negativă. Aria triunghiului ortic este în acest caz $-2\lambda S$, iar tabloul variaţiunei lui K şi S_1 devine

$K =$	$-\infty$	K'	0	K_1	K''	$+\infty$
$S_1 =$	$+\infty$	0	$-2\lambda S$	S_1	0	$+\infty$

Observăm însă că avem

$$S.\frac{(1-8\lambda)}{8(1+\lambda)} > -2\lambda S$$

căci această inegalitate se reduce la

$$(1+4\lambda)^2 > 0,$$

astfel că maximul lui S_1 este tot valoarea (6), obţinută mai sus, dată de valoarea (5) a lui K.

D-nul Leon Weiss (Galaţi) a dat o soluţie parţială cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

Alte soluţii parţiale de D-nii Gh. D. Simionescu şi Filip S. Goldstein.

Soluţia de mai sus a fost redijată depe Notele rămase dela regretatul V. Cristescu.

O. Or.

PROBLEMA 3292. *Când putem avea:*

$$\varphi(N+1) < \varphi(N)$$

$\varphi(1)$ *fiind indicatorul numărului* 1?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l N. BOTEA:
După notaţia lui EULER avem:

$$\varphi(N) = N\frac{\pi(a-1)}{\pi a}$$

$$\varphi(N+1) = (N+1)\frac{\pi(b-1)}{\pi b}$$

unde a_i şi b_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ fiind factorii primi ai lui N şi N + 1.
Relaţia cerută se poate deci scrie:

$$(1) \qquad (N+1).\frac{\pi(b-1)}{\pi b} < N.\frac{\pi(a-1)}{\pi a}$$

sau:

$$(2) \qquad N\left[\frac{\pi(a-1)}{\pi a} - \frac{\pi(b-1)}{\pi b}\right] > \frac{\pi(b-1)}{\pi b}.$$

Cum însă:

$$\frac{\pi(b-1)}{\pi b} < 1$$

urmează că vom găsi condiţia:

$$(3) \qquad N\left[\frac{\pi(a-1)}{\pi a} - \frac{\pi(b-1)}{\pi b}\right] \geqslant 1.$$

Deasemenea mai general am avea:

$$\varphi(N+k) < \varphi(N)$$

când:

$$(4) \qquad N\left[\frac{\pi(a-1)}{\pi a} - \frac{\pi(b-1)}{\pi b}\right] \geqslant k.$$

Scriind neegalitatea 1) sub forma :

$$\frac{N+1}{N} < \frac{\pi(a-1)}{\pi a} \cdot \frac{\pi b}{\pi(b-1)}$$

şi ţinând seamă că :

$$\frac{N+1}{N} > 1$$

avem şi :

$$\frac{\pi(a-1)}{\pi a} \cdot \frac{\pi b}{\pi(b-1)} > 1$$

sau :

$$(5) \qquad \frac{\pi b}{\pi a} > \frac{\pi(b-1)}{\pi(a-1)}.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

PROBLEMA 3667. *Să se determine două polinoame* P(x), Q(x) *aşa încât să avem identitatea*

$$\frac{2}{4x^2+8x+4} = \frac{P(x)\,Q(x+1) - Q(x)\,P(x+1)}{P(x)\,P(x+1) + Q(x)\,Q(x+1)}$$

P(x) *fiind inferior în grad lui* Q(x).

TH. ANGHELUŢĂ.

Să generalizăm problema căutând cele două polinoame ca să satisfacă identitatea

$$(1) \qquad \frac{K}{x^2+px+q} = \frac{P(x)\,Q(x+1) - Q(x)\,P(x+1)}{P(x)\,P(x+1) + Q(x)\,Q(x+1)}.$$

Să presupunem că fracţia din partea a doua a acestei identităţi este reductibilă şi fie D(x) c. m. m. d. c. dintre numărător şi numitor.

In aceste condiţiuni identitatea (1) este tot una cu identităţile

$$(2) \begin{cases} P(x)\,Q(x+1) - Q(x)\,P(x+1) = KD(x) \\ P(x)\,P(x+1) + Q(x)\,Q(x+1) = (x^2+px+q)\,D(x). \end{cases}$$

Fie m, n, p respectiv gradele polinoamelor $P(x)$, $Q(x)$, $D(x)$. Presupunând $n > m$ avem următoarele relaţii

$$2n = p + 2 \quad , \quad m + n - 1 = p$$

$$n = \frac{p}{2} + 1 \qquad m = \frac{p}{2}.$$

Prin urmare $D(x)$ trebuie să fie un polinom de grad par. Vom considerà cazul cel mai simplu

$$p = o.$$

Atunci $P(x)$ se reduce la o constantă

$$P(x) = c$$

iar $Q(x)$ un polinom de gradul întâi,

$$Q(x) = ax + b.$$

In acest caz particular identitatea (1) devine

$$(3) \qquad \frac{K}{x^2 + px + q} = \frac{ac}{(ax + b)(ax + a + b) + c^2}.$$

Se observă că dacă $P(x)$ şi $Q(x)$ satisfac identitatea (1) atunci şi polinoamele obţinute înmulţind pe $P(x)$ şi $Q(x)$ cu un acelaş factor o satisfac.

Din identitatea (3) deducem ecuaţiile

$$ac = K \quad , \quad a^2 = 1 \quad , \quad 2ab + a^2 = p \quad , \quad ab + b^2 + c^2 = q.$$

Acest sistem este compatibil dacă avem satisfăcută condiţia

$$(4) \qquad \frac{p^2 - 1}{4} + K^2 = q,$$

şi atunci avem

$$a = \pm 1 \quad , \quad c = \frac{K}{a} \quad , \quad b = \frac{p - 1}{2a}.$$

Prin urmare polinoamele cerute sunt

$$P(x) = \frac{K}{a} \quad , \quad Q(x) = ax + \frac{p - 1}{2a}.$$

Sau înmulțindu-le cu un acelaș factor putem luà polinoamele

$$K \quad , \quad x + \frac{p-1}{2} .$$

Avem deci identitatea

$$\frac{K}{x^2 + px + q} = \frac{K\left(x + \frac{p+1}{2}\right) - K\left(x + \frac{p-1}{2}\right)}{\left(x + \frac{p+1}{2}\right)\left(x + \frac{p-1}{2}\right) + K^2}$$

dacă condiția (4) este îndeplinită.

Pentru cazul particular dat condiția (4) este satisfăcută și deci polinoamele sunt

$$P(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad Q(x) = x + \frac{1}{2}$$

sau

$$1 \quad , \quad 2x + 1.$$

Să căutăm acuma a satisface identitatea (1) prin polinoame de acelaș grad.

In acest caz polinomul $P(x)\ P(x+1) + Q(x)\ Q(x+1)$ este de gradul $2n$. Din a doua identitate din (2) deducem

$$2n = p + 2.$$

Polinomul $P(x)\ Q(x+1) - Q(x)\ P(x+1)$ este de gradul $2n - 2$. Prima identitate din (2) ne dă

$$2n - 2 = p.$$

$$\therefore \quad n = \frac{p}{2} + 1.$$

Luând ca și mai sus cazul cel mai simplu $p = 0$, polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ sunt de gradul întâi

$$P(x) = \alpha x + \beta \quad , \quad Q(x) = \alpha' x + \beta'.$$

Cu aceste polinoame identitatea (1) devine

$$\frac{K}{x^2 + px + q} = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{(\alpha^2 + \alpha'^2)x^2 + (2\alpha\beta + 2\alpha'\beta' + \alpha^2 + \alpha'^2)x + \beta^2 + \beta'^2 + \alpha\beta + \alpha'\beta'}.$$

Deducem de aici sistemul

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 = 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 = \dfrac{2q - p + 1}{2} \\ \alpha'\beta - \alpha\beta' = K \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' = \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Ultimile două ecuații din sistemul (5) ne dau

$$(6)\qquad \beta = \frac{p-1}{2}\alpha + K\alpha' \quad , \quad \beta' = \frac{p-1}{2}\alpha' - K\alpha.$$

Ridicându-le la patrat și adunându-le găsim

$$\beta^2 + \beta'^2 = \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + K^2\right](\alpha^2 + \alpha'^2).$$

Ținând seamă de primile două ecuații din (5) găsim condiția (4). Această condiție fiind satisfăcută pentru a determină polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ vom luà pentru α și α' două numere a căror sumă a pătratelor să fie unu, iar β și β' vor fi dați de ecuațiile (6).

Ca aplicație să considerăm exemplul dat.

Vom luà

$$\alpha = \frac{3}{5} \quad , \quad \alpha' = \frac{4}{5}$$

și atunci găsim

$$\beta = \frac{7}{10} \quad , \quad \beta' = \frac{1}{10}.$$

Au rezolvat bine problema tratând cazul particular dat D-nii: P. Ghișoiu; C. Iosif; V. Novac.

PROBLEMA 3742. *Să se găsească 2 numere de câte 5 cifre fiecar , în care să intre toate cifrele o singură dată şi aşa ca suma acelor 2 numere să aibă ultimele 3 cifre identice, prima dela stânga îndoitul ultimei mărit cu unitatea iar a doua dela stânga ultima micşorată cu unul.*

I. C. SAVIN.

Conform enunţului avem

$$\begin{array}{r} abcde \\ fghij \\ \hline kmnnn \end{array}$$

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=45 \qquad (1)$$

$$k=2n+1 \quad \text{şi} \quad m=n-1. \qquad (2)$$

Prima din relaţiile (2) arată că n poate fi cel mult 4, iar a doua din acele relaţii arată că n nu poate fi mai mic ca 1. Deci $kmnnn$ poate fi unul din numerele

$$30111 \ ; \ 51222 \ ; \ 72333 \text{ sau } 93444. \qquad (3)$$

Inlocuind în adunarea numerelor căutate pe $kmnnn$ pe rând prin numerele şirului (3) se obţin posibilităţile cuprinse în următoarele 8 tablouri uşor de citit.

					Suma cifrelor
$a+f=3$	$b+g=0$	$c+h=1$	$d+i=1..$	$e+j=1..$	6
			$d+i+1=1..$	$e+j=11..$	15
		$c+h+1=1$	$d+i=11..$	$e+j=1..$	15
			$d+i+1=11..$	$e+j=11..$	24
	$b+g+1=0$	$c+h=11$	$d+i=1..$	$e+j=1..$	Imposibil
			$d+i+1=11..$	$e+j=11..$	
		$c+h+1=11$	$d+i=11..$	$e+j=1..$	
			$d+i+1=11..$	$e+j=11..$	

				Suma cifrelor
$a+f+1=3$	$b+g=10$	$c+h=1$	$d+i=1$ . . $e+j=1$ . .	15
			$d+i+1=1$ . . $e+j=11$ . .	24
		$c+h+1=1$	$d+i=11$ . . $e+j=1$ . .	24
			$d+i+1=11$ . . $e+j=11$ . .	33
	$b+g+1=10$	$c+h=11$	$d+i=1$ . . $e+j=1$ . .	24
			$d+i+1=1$ . . $e+j=11$ . .	33
		$c+h+1=11$	$d+i=11$ . . $e+j=1$ . .	33
			$d+i+1=11$ . . $e+j=11$ . .	42

				Suma cifrelor
$a+f=5$	$b+g=1$	$c+h=2$	$d+i=2$ . . $e+j=2$ . .	11
			$d+i+1=2$ . . $e+j=12$ . .	21
		$c+h+1=2$	$d+i=12$ . . $e+j=2$ . .	21
			$d+i+1=12$ . . $e+j=12$ . .	30
	$b+g+1=1$	$c+h=12$	$d+i=2$ . . $e+j=2$ . .	21
			$d+i+1=2$ . . $e+j=12$ . .	30
		$c+h+1=12$	$d+i=12$ . . $e+j=2$ . .	30
			$d+i+1=12$ . . $e+j=12$ . .	39

				Suma cifrelor
$a+f+1=5$	$b+g=11$	$c+h=2$	$d+i=2$ . . $e+j=2$ . .	21
			$d+i+1=2$ . . $e+j=12$ . .	30
		$c+h+1=2$	$d+i=12$ . . $e+j=2$ . .	30
			$d+i+1=12$ . . $e+j=12$ . .	39
	$b+g+1=11$	$c+h=12$	$d+i=2$ . . $e+j=2$ . .	30
			$d+i+1=2$ . . $e+j=12$ . .	39
		$c+h+1=12$	$d+i=12$ . . $e+j=2$ . .	39
			$d+i+1=12$ . . $e+j=12$ . .	48

				Suma cifrelor
$a+f=7$	$b+g=2$	$c+h=3$	$d+i=3 \ldots e+j=3 \ldots$	18
			$d+i+1=3 \ldots e+j=13 \ldots$	27
		$c+h+1=3$	$d+i=13 \ldots e+j=3 \ldots$	27
			$d+i+1=13 \ldots e+j=13 \ldots$	36
	$b+g+1=2$	$c+h=13$	$d+i=3 \ldots e+j=3 \ldots$	27
			$d+i+1=3 \ldots e+j=13 \ldots$	36
		$c+h+1=13$	$d+i=13 \ldots e+j=3 \ldots$	36
			$d+i+1=13 \ldots e+j=13 \ldots$	45

				Suma cifrelor
$a+f+1=7$	$b+g=12$	$c+h=3$	$d+i=3 \ldots e+j=3 \ldots$	29
			$d+i+1=3 \ldots e+j=13 \ldots$	36
		$c+h+1=3$	$d+i=13 \ldots e+j=3 \ldots$	36
			$d+i+1=13 \ldots e+j=13 \ldots$	45
	$b+g+1=12$	$c+h=13$	$d+i=3 \ldots e+j=3 \ldots$	36
			$d+i+1=3 \ldots e+j=13 \ldots$	45
		$c+h+1=13$	$d+i=13 \ldots e+j=3 \ldots$	45
			$d+i+1=13 \ldots e+j=13 \ldots$	54

				Suma cifrelor
$a+f=9$	$b+g=3$	$c+h=4$	$d+i=4 \ldots e+j=4 \ldots$	24
			$d+i+1=4 \ldots e+j=14 \ldots$	33
		$c+h+1=4$	$d+i=14 \ldots e+j=4 \ldots$	33
			$d+i+1=14 \ldots e+j=14 \ldots$	42
	$b+g+1=3$	$c+h=14$	$d+i=4 \ldots e+j=4 \ldots$	33
			$d+i+1=4 \ldots e+j=14 \ldots$	42
		$c+h+1=14$	$d+i=14 \ldots e+j=4 \ldots$	42
			$d+i+1=14 \ldots e+j=14 \ldots$	51

				Suma cifrelor
$a+f+1=9$	$b+g=13$	$c+h=4$	$d+i=4$ . . $e+j=4$ . .	33
			$d+i+1=4$ . . $e+j=14$ . .	42
		$c+h+1=4$	$d+i=14$ . . $e+j=4$ . .	42
			$d+i+1=14$ . . $e+j=14$ . .	51
	$b+g+1=13$	$c+h=14$	$d+i=4$ . . $e+j=4$ . .	42
			$d+i+1=4$ . . $e+j=14$ . .	51
		$c+h+1=14$	$d+i=14$ . . $e+j=4$ . .	51
			$d+i+1=14$ . . $e+j=14$ . .	60

Din aceste 64 egalităţi cele în care

$$b+g+1=0$$

sunt imposibile căci ar dà pentru b şi g valori negative, iar din celelalte vor dà soluţii numai acelea în care suma din ultima egalitate este 45 conform condiţiei (1). Extrăgând din tabel egalităţile cari dau soluţii, avem după reducerea termenilor asemeni:

$$a+f=7\ ;\ b+g=1\ ;\ c+h=12\ ;\ d+i=12\ ;\ e+j=13 \quad (4)$$

$$a+f=6\ ;\ b+g=12\ ;\ c+h=2\ ;\ d+i=12\ ;\ e+j=13 \quad (5)$$

$$a+f=6\ ;\ b+g=11\ ;\ c+h=13\ ;\ d+i=2\ ;\ e+j=13 \quad (6)$$

$$a+f=6\ ;\ b+g=11\ ;\ c+h=12\ ;\ d+i=13\ ;\ e+j=3. \quad (7)$$

Considerăm egalităţile (4). Vom dà soluţiile acestor egalităţi în cazul când

$$a>f\ ;\ b>g\ ;\ c>h\ ;\ d>i\ ;\ e>j$$

celelalte soluţii deducându-se din acestea prin schimbarea cifrelor între ele, de exemplu a cu f sau b cu g etc. Se mai observă că deoarece sumele $c+h$ şi $d+i$ au aceiaş valoare din o soluţie

$$a\ b\ c\ d\ e$$

$$f\ g\ h\ i\ f$$

se mai poate derivà o altă soluţie şi schimbând coloanele (c, h) şi (d, i) între ele.

Cu aceste observaţiuni, soluţiile întregi ale egalităţilor (4) sunt date de tabloul

a, f	b, g	c, h	d, i	e, j
7, 0	1, 0	9, 3	9, 3	9, 4
6, 1		8, 4	8, 4	8, 5
5, 2		7, 5	7, 5	7, 6
4, 3				

din care nu sunt admisibile decât valorile subliniate. Fie soluţia fundamentală

$$51987 + 20346 = 72333$$

aşa cum este înscrisă în tabel. Prin schimbarea cifrelor între ele pe aceeaş coloană în toate modurile posibile, apoi prin schimbarea coloanelor (c, h), (d, i) între ele, se obţin în cazul egalităţilor (4) următoarele 32 sisteme de soluţiuni distincte:

51987 20346	51986 20347	51947 20386	51946 20387	51897 20436	51896 20437
51837 20496	51836 20497	51497 20836	51496 20837	51437 20896	51436 20897
51387 20946	51386 20947	51347 20986	51346 20987	50987 21346	50986 21347
50947 21386	50946 21387	50897 21436	50896 21437	50837 —	50836 —
50497	50496	50437	50436	50387	50386
50347	50346	—	—	—	—

Egalitățile (5) dau următoarele 32 soluțiuni.

59287 13046	59286 13047	59247 13086	59246 13087	59087 13246	59086 13247	59047 13286	59046 13287
58297 14036	58296 14037	58237 14096	58236 14097	58097 14236	58096 14237	58037 14296	58036 14297
54297 18036	54296 18037	54237 18096	54236 18097	54097 18236	54096 18237	54037 18296	54036 18297
53287 19046	53286 19047	53247 19086	53246 19087	53087 19246	53086 19247	53047 19286	53046 19287

Egalitățile (6) dau soluțiile

$$58927 + 13406 = 72333$$

din care se deduc prin permutări următoarele 32 soluțiuni diferite între ele.

58927 13406	58926 13407	58907 13426	58906 13427	58729 13604	58724 13609	58709 13624	58704 13629
58629 13704	58624 13709	58609 13724	58604 13729	58427 13906	58426 13907	58407 13926	58426 13907
53927 18406	53926 18407	53907 18426	53906 18427	53729 18604	53724 18609	53709 18624	53704 18629
53629 18704	53624 18709	53609 18724	53604 18729	53427 18906	53926 18407	53407 18926	53426 18907

La fel se obțin următoarele 3 soluțiuni principale din egalitățile (7):

59873	67982	68792
12460	04351	03541

Schimbând între ele cifrele coloanelor, căci coloanele nu se

pot permută în cazul egalității (7) se găsește următorul tabel conținând 48 soluțiuni distincte.

68792 03541	68791 03542	68742 03591	68741 03592	68592 03741	68591 03742	68542 03791	68541 03792
67982 04351	67981 04352	67952 04381	67951 04382	67382 04951	67381 04952	67352 04981	67351 04982
64982 07351	64981 07352	64952 07381	64951 07382	64382 07951	64381 07952	64352 07981	64351 07982
63792 08541	63791 08542	63742 08591	63741 08592	63592 08741	63591 08742	63542 08791	63541 08792
59873 12460	59870 12463	59863 12470	59860 12473	59473 12860	59470 12863	59463 12870	59460 12873
52873 19460	52870 19463	52863 19470	52860 19473	52473 19860	52470 19863	52463 19870	52460 19873

In total problema are 144 soluțiuni distincte.

D-l R. Brossat a dat 21 soluțiuni distincte și a enunțat că problema are 112 soluțiuni. D-sa nu a considerat la cazul (7) soluțiunile care încep cu zero.

PROBLEMA 3745. *La droite qui joint le centre isogone au centre de gravité d'un triangle* ABC *passe au centre du cercle circonscrit au triangle antipodaire de ce centre isogone, par rapport à* ABC.

V. Thébault.

Prenons comme triangle fondamental le triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ antipodaire du centre isogone V du triangle ABC. Si x, y, z sont les distances de V aux côtés de $\alpha\beta\gamma$, les distances de B et C à $\beta\gamma$ sont $x + \frac{1}{2}y$, $x + \frac{1}{2}z$, et les coordonnées du centre de gravité G de ABC sont, par conséquent,

$$4x + y + z, \quad x + 4y + z, \quad x + y + 4z.$$

La droite VG a pour équation $\Sigma\,(y - z)\,X = 0$ et passe par le centre (1, 1, 1) du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$.

R. Goormaghtigh.

*EXERCIŢII

8. Se cere numărul *dmszu* în care *d* e prim, *dm* patrat, *dms* cub, *z* un număr din şirul lui FIBONACCI, iar *zu* termină un patrat.

M. I. UNGHEANU.

R. Cifra *d* poate fi 1, 2, 3, 5 sau 7. Numărul *dm* poate fi 16, 25, 36. Cubul *dms* e deci 216. Numerele de o cifră din şirul lui FIBONACI sunt 0, 1, 2, 3, 5, 8. De aci soluţiile: *25600; 25601; 25604; 5609; 25616; 25621; 25624; 25625; 25629; 25636; 25656; 25681; 25684; 25689.*

9. Care sunt cuburile *abcad* în care $(a+b)$, c, $(a+d)$ e o progresie aritmetică crescătoare.

V. I. CRIVĂŢ.

R. Condiţia unică e $2c = 2a+b+d$ cu $b < d$. Se fac toate numerele în aceste condiţiuni şi li se extrag rădăcina cubică. Găsim $35937 = 33^3$.

10. Se cer patratele consecutive perechi *abcdef* şi *abfgef* în care $f = c+g$, $d = f+g+a$. Se mai ştie că primul patrat se divide cu 3.

I. FOCA.

R. Diferenţa patratelor lui $(2n+2)$ şi $2n$ este $4(2n+1)$. Diferenţa patratelor cerute se divide cu 100. Deci $(2n+1)$ e multiplu nepereche de 25 şi deci $2n$ se termină cu 24 sau 74 şi prin urmare patratele cu 76. Deci $e = 7$ şi $f = 6$. Cum a e cel puţin 1 reese că d nu e decât 7, 8 sau 9 când g e 0, 1, sau 2. Singurele numere posibile sunt $1b6776$; $2b6876$; $3b6976$; $1b5876$; $2b5976$; $1b4976$. Incercând a extrage rădăcina patrată găsim că primul patrat este $104976 = 324^2$ şi al doilea apoi $106276 = 326^2$.

11. Se cere cubul *dmszu*, la care *dmz* şi *sz* sunt patrate iar *zu* număr prim.

E. ST. IACOB.

R. Cum *s* termină un patrat ca şi *sz*, patrat de două cifre, reese că numerile căutate sunt de formele $d000u$; $d001u$; $d004u$; $d009u$; $dm16u$; $dm49u$ şi $dm64u$. Complectând patratul de trei cifre *dms* din numerele terminate cu *s* şi extrăgând rădăcina cubică găsim soluţia: $12167 = 23^3$.

12. După un cub de două cifre scrim răsturnat un patrat de două cifre şi la urmă alt patrat de două cifre, direct. Numărul scris astfel e un cub.

N. PAVEL.

R. Cubul de două cifre e 27 sau 64. Cuburile sunt coprinse între 270000 şi 279999 sau 640000 şi 649999. Rădăcinile cubice sunt 64,6... şi 65,4... sau 86,1... şi 86,6. Singura soluţie e deci $65^3 = 274625$. El îndeplineşte condiţiile cerute, care însă sunt superflue pentru găsirea soluţii.

PROBLEME PROPUSE.

3733[1]). Să se arate că suma patratelor numerelor prime cu N şi mai mici ca el, este:

$$\frac{1}{6} N\,[2N\varphi(N) + (-1)^n\,\varphi(p.q.r.\ldots)],$$

iar suma cuburilor aceloraşi numere, este:

$$\frac{1}{4} N^2\,[N\varphi(N) + (-1)^n\,\varphi(p.q.r.\ldots)],$$

$\varphi(N)$ fiind indicatorul lui N, iar $p, q, r, \ldots$ fiind cei n factori primi ai lui.

IOAN B. FLORESCU.

3831. Cari numere zecimale înmulţite cu *6* dau numere întregi scrise cu trei cifre consecutive?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*3832. Care numere din şirul lui FIBONACCI se termină cu o anumită cifră?

I. MURĂROIU.

3833. Să se demonstreze că dacă $\varphi(N)$ este numărul numerelor prime şi inferioare lui N, atunci expresiunea

$$E = 160^{\varphi(N)} + 96^{\varphi(N)} - 5^{\varphi(N)} - 3^{\varphi(N)}$$

se divide prin 62N, dacă N este nepereche.

Să se modifice anunţul pentru cazul când N este pereche.

COLONEL GH. BUICLIU.

*3834. Se dă un triunghiu oarecare ABC cu $AB < AC$. In interiorul lui se ia un punct Q aşà ca:

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ACQ.$$

Să se arate că avem:

$$QC - QB > AC - AB.$$

Cu alte cuvinte diferenţa $(QC - QB)$ creşte pe măsură ce creşte unghiul ABQ.

P. SERGESCU.

---

[1]) In locul problemei cu acelaş număr publicată la pag. 119 din vol. XXXIV.

*3835. Deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre, d'un triangle ABC coupent les côtés BC, CA, AB l'une en A', B', C', l'autre en A'', B'', C''. Demontrer la relation :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{A'A''}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{BB''}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{C'C''}}=0.$$

R. GOORMAGHTIGH.

3836. Pe un plan orizontal se aşează o sferă şi o dreaptă perpendiculară pe plan în afara sferei. Dacă dreapta este incandescentă, care este limita umbrei sferei pe plan?

I. IONESCU.

*3837. Soient α, β, γ les angles de même sens que forment, avec les cotés $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, d'un triangle ABC, les droites AD, BE, CF qui joignent les sommets aux contacts du cercle inscrit; ρ_a, ρ_b, ρ_c les rayons des cercles passant en A, B, C, et touchant BC, CA, AB, en D, E, F. On a les relations:

$$a\rho_a \sin^2\alpha = b\rho_b \sin^2\beta = c\rho_c \sin^2\gamma.$$

V. THÉBAULT.

3838. Să se arate că suma cuburilor expresiunilor :

$$3x^2y^2 \quad ; \quad x(x^3+2y^3) \quad ; \quad y(2x^3+y^3)$$

este un patrat perfect.

Deasemenea ştiind că avem :

$$xy(x+y)=1$$

atunci suma cuburilor expresiunilor :

$$x^3-y^3+3xy\,(2x+y) \qquad \text{şi} \qquad y^3-x^3+3yx\,(2y+x)$$

este un cub perfect.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3839. Intre elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia :

$$S=\tfrac{1}{2}Rr\,[\cos A\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\,(\operatorname{cot}\tfrac{1}{2}B\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C-1)$$
$$+\cos B\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\,(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C-1)$$
$$+\cos C\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B-1)]$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

N. O. ZAHARIA.

3840. Să se arate că între unghiurile oricărui triunghiu avem relaţiile :

$$\Sigma\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A\,(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C)^3=1+\Sigma\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{3}A\,\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B-6\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C$$

$$\Sigma\operatorname{cotg}^3A(\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)^3=1+\Sigma\operatorname{cotg}^3A\operatorname{cotg}^3B-6\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. (3548, 728, 78, 802, 12, 19, 26); *Alexandrescu I.* (3761, 71); *Alexiu I.* (E); *Aliman I.* (3781, 91, 801, 02); *Almăjan P.* (3806, E); *Antonescu N.* (3815, 17, 25, 26, N); *Avram N. C.* (3812, P); *Bădescu Em. A.* (3806); *Balaban I. Gh.* (3747); *Bidoianu Adr.* (3771, 81); *Boerescu P. Gh.* (3781, 91, 801, 02, 03, 11, 12, P, R); *Boian C. Ion* (3761, 71, 78, 81, 82, 801, 12, 17); *Bumbulici P.* (3803, E); *Burlacu Eug.* (3696, 771); *Coşniţă Cezar* (2827, 3778, 818, 19, 25, 26, 28, 30, E, N, P); *Costache N. N.* (3692, 781, 91, 812); *Cristescu Anghel* (3778); *Crivăţ I. V.* (3761, 71, 91, 802, 03, 06, E, R); *Deculescu D. Gh.* (3802); *Donciu N.* (3719, E); *Drinceanu A. B.* (3778); *Gheorghiu Adr.* (E); *Gheorghiu-Gladiş Th. Gh.* (2461, 772, 814, 16, 18, 19); *Ghişoiu I. P.* (3761, 78, 91, 800, 01, 12, 23, 26, 27, 28); *Ghiţescu D. A.* (3802); *Goormaghtigh R.* (3738, 875, A, N, P); *Grecu M. Cr.* (3751, 71, 81, 82, 91, 801, 12, E); *Grossu M.* (E); *Ionescu M. P. H.* (3778, 81, 83, 91, 812, 23, E, P, R); *Ionescu-Ţiu D. C.* (3791); *Mărgineanu I.* (P); *Mereuţă E.* (3812, E); *Millea Ene* (3771, 81, 91, 801); *Mladiu Gh.* (3812); *Mocănescu C. I.* (3771, 91, 801); *Motoc D. M.* (3771, 81, 91, 801, 02, 12, R); *Murăroiu I.* (2591, 830, 3696, 819, 23, 25, 27, 28, P, R); *Negrea A. M. Leonte* (3786, 801, 12); *Păun A. N.* (3777); *Păun Gh.* (3593, 602, 13, 751, 61, 71, 91, 801, 12); *Popa Ion* (3812); *Popescu D-tru* (3613, 771, 78, 802); *Popescu C. V.* (E); *Radoveneanu N. N.* (3781, 91, 801, 12); *Raicu C. Al.* (3692, 811, 12, R); *Rentea G. N.* (3602, 13, 791); *Russu N. C.* (3802); *Savin C. I.* (3672, 758, 83, 96, 98, 803, 06, 18, 19, E, N, P); *Şerban-Ulmeni D.* (3672, 752, 61, 81, 91, 801, 02, 12, P, R); *Spirescu A. Gh.* (3791); *Ştefănescu I. C.* (P); *Ungheanu I. M.* (3781, 91); *Velicescu N. N.* (3595, 695, 96, 98, 704, 71, 78, 81, 82, 91, 801, E); *Velicescu Titus* (3778); *Voicu C. Ioan* (2440, 3593, 602, 72, 781, 82, 91, 801, 11, 12, P); *Voicu Gh. N.* (3771, 81, 91, 801, 12, R); *Zaharia F. I.* (3801); *Zaharia O. N.* (3672, 91); *Zamfirescu O. G.* (3593, 602, 771, 91, 801, 12).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer Inspector General **C. Malcoci,** Directorul General al Exploatării Monopolurilor (adresa: Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

Lipsesc Nr 45 7 și următorii până la finea anului — 1929-1930
C III 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXV.

NUMĂRUL 6. — FEVRUARIE 1930.

SUMARUL

1. Joseph Neuberg . . . . . † *V. Cristescu.*
2. Sur l'orthopôle et sur des théorèmes de Droz-Farny et Neuberg . . . . . *R. Goormaghtigh.*
3. Sur la droite de Simson . . . . . *V. Thébault.*
4. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
5. Note matematice: 30 — 36.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 186.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1128, 2544, 3388, 3629, 3672, 3822, 3831.
10. Exerciţii: 32 — 37.
11. Probleme propuse: 3861 — 3870.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
1930

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXV se compune din D-nii: **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului; **O. Ţino,** Doctor în Matematici, Profesor în Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul General al Exploatării Monopolurilor, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67. 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14. 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 501, 02, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95. 709, 13, 17, 35, 38, 58. 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56. 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 39, 85, 208, 30, 55, 60, 75, 78, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 400, 05, 20, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 69, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 49, 76, 80, 84, 93, 97, 99, 804, 05, 08, 10, 20, 29, 34, 35, 36, 44, 45, 48, 49, 50, 53, 56, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial" B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

JOSEPH NEUBERG*)
(1840 — 1926)

In „*Gazeta Matematică*“ s'a vorbit dese ori despre revista belgiană „*Mathesis*“ şi despre întemeietorii ei: PAUL MANSION şi JOSEPH NEUBERG, primul fost profesor la Universitatea din Gand, şi al doilea la cea din Liège.

Revista „*Mathesis*“ a avut o însemnată înrâurire asupra mişcării matematice din ţara noastră. După ce a încetat să apară în anul 1889 revista „*Recreaţii ştiinţifice*“ dela Iaşi, studenţii şi elevii-ingineri români îşi trimiteau modestele lor lucrări revistei „*Mathesis*“, care ereau în totdeauna primite cu multă bunăvoinţă şi încurajare de către întemeietorii ei. Dintre aceşti corespondenţi, de altfel, sunt şi unii dintre întemeietori ai *Gazetei Matematice* şi dintre foştii şi actualii redactori ai ei. Chiar în prezent mulţi tineri români, elevi de licee, de şcoli speciale, studenţi ai Universităţilor noastre, şi chiar profesori români, îşi trimit din lucrările lor revistei „*Mathesis*“.

PAUL MANSION a încetat din viaţă la 16 Aprilie 1919, iar JOSEPH NEUBERG la 22 Martie 1926. In „*Gazeta Matematică*“, Vol. XXVII pag. 275 s'a publicat o biografie a lui P. MANSION.

Pentru buna primire făcută corespondenţilor români, iar în ceeace mă priveşte, în semn de adâncă recunoştinţă pentru încurajarea şi sfaturile ce mi le-a dat ca corespondent al revistei „*Mathesis*“, voiu dà aci biografia lui J. NEUBERG, după datele publicate în „*Mathesis*“, Anul 1926, pag. 97 şi 241.

JEAN-BAPTISTE-JOSEPH NEUBERG s'a născut la Luxembourg la 30 Octomvrie 1840. El trecu aci examenul de maturitate şi intră în acelaş an 1859 în Şcoala normală de ştiinţe de pe lângă Universitatea din Gand, pe care o termină la 1862, şi fu numit profesor agregat de matematici în învăţământul mediu de grad superior, la Şcoala normală primară din Nivelles. Apoi fu numit pe rând profesor de matematici superioare la Ateneele regale din Aolon, Bruges şi Liège, oraş în care rămase până la moartea lui.

*) Acest articol s'a găsit înjghebat de regretatul VASILE CRISTESCU în hârtiile rămase dela dânsul. Partea finală nu s'a putut găsi. Reproducem numai ce a rămas scris de dânsul.

I. I.

In scurt timp după sosirea sa în Liège, NEUBERG fu numit repetitor la cursurile de Geometrie descriptivă, de Algebră superioară şi de Geometrie analitică dela Şcoala de Mine, iar în 1880 i se încredinţă cursul de Analiză infinitezimală dela aceeaşi Şcoală.

In 1884, NEUBERG fu numit profesor la Facultatea de Ştiinţe din Liège la cursul de Algebră superioară şi de Analiză infinitezimală. A mai predat la acea Universitate cursurile de Complemente şi de Geometrie descriptivă, de Geometrie analitică şi de Metodologie matematică.

La 15 Decemvrie 1897 fu ales membru titular al Academiei regale Belgiene, al cărui membru corespondent ereă din 1891.

Deşi a avut de predat în învăţământ multe cursuri, NEUBERG nu s'a desinteresat nici odată de cercetările ştiinţifice, şi a publicat un număr considerabil de note şi mai multe articole şi memorii asupra diverselor părţi ale matematicilor, şi în particular asupra Geometriei Triunghiului şi a Tetraedrului, al căror creiator a fost împreună cu E. LEMOINE şi H. BROCARD. O listă complectă a acestor publicaţiuni până în anul 1911, se găseşte în *Liber Memorialis*, publicată de elevii şi admiratorii săi cu ocaziunea punerii sale în retragere.

† V. CRISTESCU.

* SUR L'ORTHOPÔLE ET SUR DES THÉORÈMES DE DROZ-FARNY ET NEUBERG

On connaît les trois propositions suivantes:

I. *Les perpendiculaires aux côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *menées par les projections* A', B', C' *de* A, B, C *sur une droite* Δ, *concourent en un point* M, *appelé orthopôle de* Δ *par rapport au triangle* ABC [1]).

II. *Deux droites rectangulaires* Δ, Δ', *menées par l'ortho-*

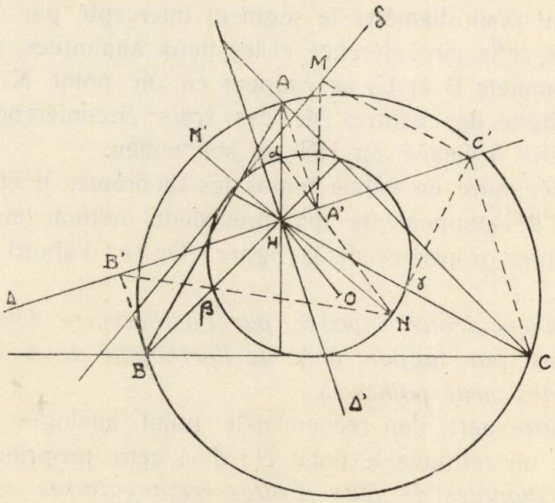
1) Voir, par exemple, NEUBERG, *Nouvelle Correspodance mathématique*, 1875, p. 189; DESBOVES, *Questions de Géométrie*, 1875, p. 241; GALLATHY, *The Modern Geometry of the triangle*, 2-e éd., p. 46.

centre H *d'un triangle* ABC, *déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux appartiennent à une droite* δ [1]).

III. *Lorsque les deux droites* Δ, Δ', *pivotent autour de* H, δ *enveloppe la conique inscrite à* ABC, *ayant pour foyers l'orthocentre* H *et le centre* O *de la circonférence* ABC [2])

Nous nous proposons d'étudier ici une configuration qui conduit à une demonstration, que nous croyons nouvelle, du théorème I et qui fait apparaître les théorèmes II et III comme des conséquences de propriétés de l'orthopôle.

1. Lorsque la droite Δ subit une translation quelconque, les perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB subissent la même translation; il suffit dès lors de démontrer le théorème I dans le cas particulier où Δ passe par H (voir fig.).



1) Mantel, *Mathesis* 1889, p. 219; Cesàro, *Ibid.*, 1890, p. 184; Noyer, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1893, p. 39; Droz-Farny, *Educational Times*, 1899; Neuberg, *Mathesis*, 1899, p. 162; Visschers, *Ibid.*, 1913, p. 256; Neuberg, *Ibid.*, 1913 p. 262; Barisien, Jerabek, Goormaghtigh, *Ibid*, 1915, p. 20; Servais, *Ibid* 1915 p. 91; Sebban, *Journal de Vuibert*, 1916 — 1917, p. 56; Barisien, *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1916, p. 124; Goormaghtigh, *Ibid.*, 1917, p. 19, Mathesis, 1922, p. 52; Mineur, *Mathesis*, 1925 p. 17; Servais, *Ibid.*, 1925, p. 98.

2) Neuberg, *Mathesis*, 1913, p. 262.

Soient α, β, γ les milieux de AH, BH, CH, et N l'intersection de $\beta B'$ et $\gamma C'$. Comme les angles $\beta B'H$ et $\gamma C'H$ sont égaux respectivement à $B'H\beta$ et $C'H\gamma$, l'angle B'NC' est égal à BHC est le point N appartient au cercle des neuf points $\alpha\beta\gamma$.

On démontre de même que $\alpha A'$ rencontre $\beta B'$ au point où $\beta B'$ recoupe le cercle $\alpha\beta\gamma$, et il en résulte que $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ se coupent en un point N du cercle des neuf points. Comme les directions de ces droites sont symétriques, par rapport à Δ, des perpendiculaires abaissées de A', B', C', sur les côtés, ces perpendiculaires se coupent au point M, symétrique de N par rapport à Δ.

2. Transformons maintenant la figure par une inversion, par rapport au cercle conjugué au triangle ABC.

La droite $\alpha A'$, qui contient les projections de A sur Δ et sur la perpendiculaire Δ' elevée en H sur Δ, a pour inverse la circonférence ayant pour diamètre le segment intercepté par Δ et Δ' sur BC. Dès lors, cette circonférence et les deux analogues, correspondant aux sommets B et C, se coupent en un point N' du cercle ABC, et la ligne des centres de ces trois circonférences est la perpendiculaire δ élevée sur HN' en son milieu.

Ceci démontre en même temps les théorèmes II et III.

3. Les développements qui précèdent mettent en évidence quelques autres propriétés de la figure. On a d'abord cette proposition :

Lorsqu'une droite Δ *passe par l'orthocentre d'un triangle, le symétrique, par rapport à* Δ, *de l'orthopôle de* Δ *appartient au cercle des neuf points* [1]).

Si d'autre part, l'on recherche le point analogue à N pour la droite Δ', on retrouve le point N ; d'où cette propriété connue :

Les orthopôles de deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre H *sont symetriques par rapport à* H.

Soient encore θ_a, θ_b, θ_c les angles que fait Δ avec les côtés du triangle ABC ; la distance ω de N à Δ est la hauteur issue de N dans le triangle B'NC' et l'on a

$$\omega \sin B'NC' = B'C' \sin B'C'N \cdot \sin C'B'N,$$

ou

$$\omega \sin A = a \cos\theta_a \cdot \cos\theta_b \cdot \cos\theta_c ,$$

1) Plus généralement, quand une droite *d* tourne autour d'un point fixe, le lieu géométrique du symétrique, par rapport à *d*, de l'orthopôle de *d* est un limaçon de Pascal (Goormaghtigh, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1918, p. 243).

et l'on retrouve la formule comme donnant la distance $\bar{\omega}$ d'une droite Δ à son orthopôle M,

$$\bar{\omega} = 2R \cos\theta_a \cdot \cos\theta_b \cdot \cos\theta_c ,$$

R étant le rayon du cercle ABC.

On remarquera enfin cette propriété qui n'a peut être pas encore été signalée.

La droite δ qui joint les milieux des segments que deux droites rectangulaires Δ, Δ', menées par l'orthocentre, déterminent sur les côtés, est perpendiculaire à la symétrique, par rapport à Δ, de la droite joignant les orthôpoles de Δ, Δ'.

R. GOORMAGHTIGH.
Bruges (Belgique).

SUR LA DROITE DE SIMSON

Dans une Note fort intéressante, M. FOCSENEANU a signalé quelques droites de SIMSON remarquables par rapport à un triangle ABC [1]). Bien que le sujet ne soit pas entièrement nouveau, il est peut-être intéressant d'ajouter quelques remarques complémentaires pour les jeunes lecteurs de cette revue.

1. Considérons un triangle ABC inscrit dans un cercle (O), (O_9) son cercle d'EULER, G, H, le centre de gravité et l'orthocentre.

Par définition, la droite Δ_1 de SIMSON d'un point M_1 du cercle (O) unit les projections orthogonales α, β, γ de M_1 sur BC, CA, AB. Si α', β', γ' désignent les intersections de $M_1\alpha$, $M_1\beta$, $M_1\gamma$ avec (O), Δ_1 est parallèle aux droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$. De plus, Δ_1 est l'homothétique du diamètre M_1OM_2 par rapport à H, le rapport étant 1 : 2.

Les droites de SIMSON Δ_1, Δ_2, de deux points M_1, M_2, (supposés quelconques), sur (O), font entre elles un angle égal à celui sous-tendu par la corde M_1M_2 on à son supplément. Par le point de concours φ de Δ_1 et Δ_2 passe une troisième droite de SIMSON Δ_3 du triangle dont la direction est perpendiculaire à M_1M_2. Toutes ces propriétés sont à présent classiques.

1) *Gazeta Matematica*, 1929 — 287.

2. *Droites de* SIMSON *passant par* O_9.—Soient Δ_1 et M_1OM_2 la droite de SIMSON cherchée et le diamètre du cercle (O) qui lui correspond dans l'homothètie (H, 1 : 2). Les droites HM_1, HM_2, coupent le cercle (O_9) suivant un diamètre $\varphi_1\varphi_2$ confondu avec Δ_1.

Δ_1 *est donc parallèle au diamètre* M_1OM_2 *et la droite de* SIMSON Δ_2 *de* M_2, *perpendiculaire à* Δ_1, *est tangente à* (O_9) *en* φ_1 [1]).

Remarques. — Dans ce cas particulier les droites Δ_2, Δ_3 se confondent.

Le diamètre M_1OM_2 est facile à déterminer. φ_1 est le point de contact de (O_9) avec l'hypocycloide de STEINER (H_2) du triangle. Si A_1, A' désignent le milieu de BC et le pied de la hanteur AA', φ_1 est situé au tiers de l'arc A_1A' à partir de A_1.

La propriété qu'a Δ_2 d'être tangente à (O_9) est aussi une application d'un beau théorème de WEILL et FONTENÉ que nous avons rappelé ici même, 1928 — 325.

Le conjugué isogonal, par rapport à ABC, de tout point M_1 du cercle (O) circonscrit est en effet situé à l'infini sur la perpendiculaire menée de M_1 à la droite de SIMSON Δ_2 de ce point. Pour que Δ_2 touche (O_9), il faut donc et il suffit que M_2O soit perpendiculaire à Δ_2, c'est-à-dire que Δ_1 soit parallèle à M_1O.

3. *Droites de* SIMSON *passant par* G. Soit un diamètre M_1OM_2 tel que la droite de SIMSON Δ_1 de M_1 passe au centre G de gravité du triangle ABC. Δ_1 qui unit le milieu de HM_1 au point G situé au tiers de OH, à partir de O, est une médiane du triangle HM_1M_2.

Lorsque la droite de SIMSON *d'un point* M_1 *du cercle circonscrit passe au centre* G *de gravité du triangle elle contient aussi le point* M_2 *diamétralement opposé à* M_1 *sur* (O), *et réciproquement.* [2]).

Δ_1 est une tangente à l'hypocycloide (H_2) de ABC tracée du centre G de gravité. Il y a donc trois diamètres M_1OM_2 répondant à la question. Δ_2, transversale réciproque de Δ_1, enveloppe par suite la conique (Σ) tangente aux côtés du triangle en leurs mi-

1) Δ_2 est une tangente commune à (O_9) et à la conique (Σ) qui touche les côtés de ABC aux isotomiques des points (BC, AO_9),...

2) La réciproque a été énoncée par BEARD, *Mathesis* 1914 — 56. Cette Revue n'a pas publié de solution de la question.

lieux.—Elle enveloppe aussi la conique (Σ'), inscrite à ABC, dont l'un des foyers est G et (O_9) le cercle principal.

Δ_2 *est donc une tangente commune à* (H_2), (Σ) et (Σ').

4. *Droite de* SIMSON *passant par* O. La réciproque d'un théorème du à AUBERT s'énonce ainsi :

Si une droite Δ_1 *rencontre les côtés du triangle* ABC *en* α, β, γ, *et que les droites joignant* A, B, C *à un point* O *de* Δ_1 *recoupent une conique* (Σ) *circonscrite à* ABC *en* A', B', C', *les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *concourent en un point* P *de* Σ [1]).

Si la droite de SIMSON Δ_1 *d'un point* M_1 *du cercle* (O) *circonscrit à un triangle* ABC *passe au centre* O, *les droites qui joignent les projections orthogonales* α, β, γ *de* M_1 *sur* BC, CA, AB, *aux points* A', B', C', *diamétralement opposés à* A, B, C, *sur* (O) *sont concourantes en un point* P *situé sur* (O) [2]).

On peut d'ailleurs obtenir simplement ce résultat et préciser la position de P.

Soient D, D' les intersections de Δ_1 avec (O), M'_1 le symétrique de M_1 par rapport à Δ_1. La droite $M'\gamma$, par exemple, rencontre (O) au symétrique C' de C par rapport à (O).

En effet, dans le quadrilatère inscriptible $M_1B\alpha\gamma$, l'angle $M_1B\alpha$ égale le supplément de l'angle $M_1\gamma D$ ou son symétrique $M'_1\gamma D$.

Par suite

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{arc}M_1D + \text{arc}DC) = \tfrac{1}{2}\,(\text{arc}DM'_1 + \text{arc}C'D'),$$

ou, comme

$$\text{arc}M_1D = \text{arc}DM'_1, \qquad \text{arc}CD = \text{arc}C'D'.$$

Les angles COD, C'OD' sont égaux et les points C, O, C' sont collinéaires.

On en déduit que *les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$, *concourent au symétrique* M_1 *de* M *par rapport à* Δ_1.

La droite de SIMSON Δ_2 de M_2, perpendiculaire à Δ_1 et transversale réciproque de cette droite par rapport à ABC est tangente commune à (H_2) et à la conique, inscrite au triangle, qui a pour foyers O, H et (O_9) pour cercle principal.

V. THÉBAULT.
Le Mans-France.

---

1) AUBERT *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1889—531.
2) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1929 — 140.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1928 — 1929

Domnilor Membri,

Dintre lucrările sau publicaţiunile de matematici aplicate la Ştiinţele Militare, apărute în intervalul de timp dela 1 Septemvrie 1928 pânăla 31 August 1929, de cari am luat cunoştinţă, citãm următoarele:

1. Proectul unui avion de mare randament, conceput de către D-nii: CARAFOLI şi VIRMOUX dela Societatea I. A. R. în curs de realizare

2. Proectul unui avion de antrenament, conceput de către inginerii militari ai Serviciului Tehnic al Arsenalului Aeronauticei, în curs de realizare.

3. Proectul unui avion de transport public, conceput de D-nii: Căpitan-Inginer NICOLAU şi Inginer FEODOROFF dela Direcţia Aeronauticei.

4. Metodă grafică pentru trasarea profilelor aripilor de avion, conferinţă ţinută de D-l Doctor-Inginer DORIN PAVEL la Cercul Aerotehnic.

5. Metodă de tragere prin ajutorul aparatelor S. O. M. publicată de către D-l Maior ANASTASESCU în *Revista Artileriei.*

6. O metodă pentru întocmirea tablelor de tragere (aplicată la tunul de 76,2) publicată de către D-l Lt.-Colonel MIHĂILESCU în *Revista Artileriei.*

7. Aparat central de preparaţia tragerilor antiaeriene, calculat şi construit după planurile D-lui Căpitan BUNGESCU.

Dar am lungi prea mult lista citaţiunilor tuturor lucrărilor, ne vine însă prea greu să o încheem, fără să pomenim cel puţin că revistele: Aeronautica, Artileria, Geniu, Marina şi Gazele, cuprind in tot acest interval de timp, numeroase articole de matematici aplicate la Ştiinţele Militare. Aceasta dovedeşte că deşi matematicile sunt izgonite aproape complet din programele analitice, boicotate acolo unde rămăşiţele mai persistă, înlocuite în bună parte cu limbi clasice sau literatură modernă, ele sunt prea necesare progresului armelor speciale. Şi nu greşim dacă în rândul armelor speciale citate mai sus, înscrim cu toată convingerea săvârşirei

unui adevăr şi celelalte arme: Infanteria şi Cavaleria, ale căror maşini de luptă sunt din ce în ce mai tehnice.

Examinând deci diversele lucrări apărute în acest interval de timp şi ţinând seamă că o bună parte din proectele, citate mai sus, sunt în curs de realizare, ne-am oprit cu toată atenţia asupra unei lucrări reale, asupra unei invenţiuni realizată şi experimentată. Este vorba de „*Aparatul central de preparaţia tragerilor antiaeriene*", calculat şi construit după planurile unui vechiu client al premiului „General PANAITESCU", de către D-l Căpitan BUNGESCU ION din Regimentul 1 de Artilerie Antiaeriană.

D-l Căpitan BUNGESCU lucrează de mult în această direcţie şi încă din anul 1927 a realizat şi pus la punct „aparatul central", iar cu ocazia tragerilor de război din toamna anului 1928, făcute la Constanţa, bateria de tunuri antiaeriene, care execută tragerea asupra unei ţinte aeriene remarcată la 400 m. cu un cablu de un avion, graţie pregătirii tragerii cu „aparatul central" a doborît ţinta. Aceasta a dovedit că într'un caz real s'ar fi doborît un avion inamic.

Crudă invenţie! am puteà exclamà la gândul doborârii unui avion şi la sdrobirea echipajului său. Dar câte victime nevinovate n'ar fi în stare să facă, în caz de război un asemenea avion?

Asemenea aparate, foarte complicate şi mai ales foarte scumpe, inaccesibile sumelor prevăzute în buget pentru acest scop, sunt construite în America, Anglia, Austria, Franţa, Germania şi Italia. Faţă de ele însă, aparatul D-lui Căpitan BUNGESCU pare că întruneşte trei calităţi deodată: simplu, precis şi eftin.

Aşa dar, în baza celor raportate mai sus şi în baza faptului că s'au obţinut rezultate reale cu un aparat militar destinat numai „apărării", nu „ofensivei", deci întru totul permis de legile umanitarismului, propunem ca premiul „General SCARLAT PANAITESCU", pe anul 1928 — 1929, să fie acordat D-lui Căpitan BUNGESCU ION pentru lucrarea sa: „Aparatul central pentru pregătirea tragerilor antiaeriene".

Anexăm aci şi un memoriu rezumativ, cu o fotografie asupra „Aparatului central".

Comisiunea pentru premiul „General Sc. PANAITESCU":
C. MALCOCI, GR. ZAMFIRESCU, CĂPITAN I. LINTEŞ.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea generală extraordinară din 12 fevruarie 1930. Anexele rămân în arhiva societăţii.

NOTE MATEMATICE

30. *Matematicile la Iaşi în anul şcolar 1837 — 1838.* Dintr'o sumară dare de seamă a învăţământului la Iaşi în anul şcolar 1837—1838 se vede că din matematici se învăţau:

a) In şcoala lancastrică. Din *aritmetică*, „calculul de rost, numeraţia şi substragerea".

b) In şcoala normală, în clasa I. Din aritmetică, „adunarea, substragerea, înmulţirea şi împărţirea", în clasa II, „din fracţii, adunarea, sustragerea, şi împărţirea, asemenea şi din numere complexe".

c) In şcoala gimnazială, la clasa I: „aritmetica, despre fracţii comune inclusive; în clasa I: „aritmetica: regula de trei, a societăţii şi a dobânzii"; în clasa III, „algebra pânăla ecuaţii de treapta întâia"; în clasa IV „al umaniorilor" „geometria elementară".

d) In Facultatea filosofiei „matematica".

I. I.

31. *Asupra problemei 1489.* In această problemă D-l I. Ionescu cereà să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{a - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{a - x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \cdots = \frac{a - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}}{x_{n-1} \quad x_n} = \alpha$$

$$x_1 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n = 2a.$$

Cu rezolvarea s'a ocupat D-l N. Kaufmann în Anul XXIX pag. 123 şi XXXII, pag. 41. Sistemul se reduce uşor la:

$$\frac{a - x_1}{x_1 - x_2} = \alpha \qquad (1) \qquad\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2a \qquad (2)$$

$$x_i + x_{i+2} = k \,.\, x_{i+1} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots n - 2) \qquad (3)$$

in care

$$k = 1/\alpha.$$

Relaţia de *recurenţă lineară* (3). (A se vedeà articolul D-lui A. Angelescu. *„Asupra relaţiunilor de recurenţă lineare omogene şi cu coeficienţi constanţi"* din Anul XXX, pag. 160) ne conduce la *ecuaţia caracteristică*

$$z^2 - kz + 1 = 0$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = \tfrac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 - 4}).$$

Expresia explicită a lui x_i este:

$$x_i = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i.$$

Coeficienții C_1 și C_2 se determină cu ajutorul relațiilor (2) și (3). Chestiunea se poate generalizà. Fie sistemul

$$x_{m+i} + a_1 x_{m+i-1} + \cdots + a_m x_i = 0, \qquad (1)$$

$$b_{k1} x_1 + b_{k2} x_2 + \cdots + bk_n x_n = \alpha_k \qquad (2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots n - m), \qquad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Soluția este:

$$x_i = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + \cdots + C_m r_m^i,$$

în care $r_1, r_2 \ldots r_m$ sunt rădăcinile *ecuației caracteristice*:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m = 0.$$

Coeficienții $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ se determină cu ajutorul ecuațiilor (2).

C. BERDAN.
Școala Politechnică București.

Sistemul de ecuații care a făcut obiectul problemei 1489 a fost găsit studiind o problemă de repartizare a eforturilor pe o nituire, chestiune care face obiectul articolului publicat la pag. 37—42 din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique de Bucarest*, unde am rezolvat complet sistemul sub forma:

$$\sum_1^n P_i = P, \qquad \frac{P - 2\sum_1^n P_i}{P_i - P_{i+1}} = \alpha \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Soluția dată acolo cu ajutorul *funcțiunilor iperbolice* este următoarea. Se pune:

$$ch\theta = (1 + \alpha)/\alpha$$

și se găsește

$$P_i = P sh\tfrac{1}{2}\theta . ch\left(\frac{n+1}{2} - i\right)/sh\tfrac{1}{2}n\theta.$$

I. IONESCU.

32. *Le curieux petit problème* cu care se termină nota publicată la pagina 53, Vol. XXXV, a D-lui V. THÉBAULT, a făcut obiectul problemei 2833 rezolvată în *Gazeta Matematică* Vol. XXVII pag. 210, unde s'a arătat că numărul N, care se poate descompune în 4 părți astfel ca prima mărită cu n, a doua micșorată cu n, a treia împărțită cu n, iar a patra înmulțită cu n, să ne deà 4 cantități egale, este de forma MP^2. S'a arătat acolo că numărul descompunerilor de acest fel, al lui N, este dat de $T-1$, în care

$$T-1=(2^{n_1-1}.\alpha+1)(2^{n_2-1}.\beta+1)\ldots(2^{n_m-1}.\lambda+1)$$

unde $2^{n_1}.\alpha, 2^{n_2}.\beta, \ldots$ sunt exponenții factorilor primi ai lui $M.P^2$.

COL. GH. BUICLIU.

33. *Asupra patrulaterului complect.* „O_1, O_2, O_3, O_4 fiind centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor, în care se poate descompune un patrulater dat, iar M fiind punctul lui MIQUEL al patrulaterului, punctele O_1, O_2, O_3, O_4, M sunt conciclice". Această proprietate este cunoscută, dar soluția ce o dau, cred că nu.

Amintesc propozițiunile:

1°. „Dacă în cercul O, luăm trei coarde $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, cele trei cercuri descrise cu aceste coarde, ca diametre, se taie a doua oară în trei puncte colineare". Și reciproc.

2°. „Trei cercuri având un punct comun P și tăindu-se după încă trei puncte colineare, se bucură de proprietatea că simetricele lui P, față de centrele celor trei cercuri, sunt conciclice cu punctul P". Aceste proprietăți se demonstrează elementar. In cazul patrulaterului, trei cercuri oarecare, O_1, O_2, O_3, de exemplu, trec prin M și se taie după una din laturile patrulaterului. In virtutea teoremei reciproce 2°, de mai sus, simetricele lui M față de O_1 O_2, O_3 (fie M_1, M_2, M_3 aceste simetrice), se vor găsi pe un cerc ce trece prin M, adică punctele:

M, M_1, M_2, M_3, sunt conciclice. Tot așà și M, M_2, M_3, M_4, vor fi conciclice. Dar punctele M, M_2 M_3 fiind comune, în primul și al doilea cerc, rezultă că punctele M, M_1, M_2, M_3, M_4 sunt pe un cerc. Cum O_i sunt mijloacele lui $\overline{MM_i}$ rezultă că și M, O_1, O_2, O_3, O_4 vor fi conciclice. Q. E. D. (Comunicată la „Grupul Geometric Universitar").

ION I. GEORGESCU-RACOVIȚĂ.
Student Mat. I.

*34. *Asupra problemei No. 3742.* Au rezolvat complect problema D-nii: Em. Mihalcea şi E. Burlacu.

Au dat numărul de soluţii indicat în dreptul fiecăruia D-nii: N. T. Panait (140), Ionescu-Ţiu (122), I. Boian (120); I. Sassu (64), I. Popa (32), M. C. Grecu (30), Raiciu Raiceff (10), P. Ghişoiu (7), V. Drăguţ (2) şi I. Mocănescu (1).

I. L.

35. *Câteva relaţiuni între elementele triunghiului*[1]). Folosind relaţiunile date în *Culegere de Probleme* trigonometrice de V. Cristescu, precum şi unele din numeroasele relaţiuni stabilite în *Gazeta Matematică* între elementele unui triunghiu, se ajunge la următoarele relaţiuni interesante:

$$(1)\qquad \frac{c^2+ba}{bc}r_a+\frac{a^2+bc}{ca}r_b+\frac{b^2+ca}{ab}r_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2r}$$

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{(a-b)(a-c)}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{(b-c)(b-a)}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{S}$$

$$(3)\qquad \frac{a}{r_a^2(r_b+r_c)}+\frac{b}{r_b^2(r_c+r_a)}+\frac{c}{r_c^2(r_a+r_b)}=\frac{1}{S}$$

$$(4)\qquad \frac{h_a-h_b}{r_c^2}+\frac{h_b-h_c}{r_a^2}+\frac{h_c-h_a}{r_b^2}=0$$

$$(5)\qquad \frac{(r_a-r_b)(r_a-r_c)(r_b-r_c)}{(b-c)r_a+(c-a)r_b+(a-b)r_c}=p$$

$$(6)\qquad \frac{b^2-c^2}{r+r_a}-\frac{c^2-a^2}{r+r_b}-\frac{a^2-b^2}{r+r_c}=2(r_b-r_c).$$

Verificarea acestor relaţiuni este uşor de făcut.

C. I. Georgescu.

---

1) Relaţiile cuprinse în această notă, împreună cu altele numeroase au fost trimise de D-l C. I. Georgescu decedatului V. Cristescu ca probleme de propus. Acesta le-a întrunit în o notă matematică, pe care o găsesc redijată în hârtiile rămase dela el.

Gh. B.

36. *Asupra curbei* **„para“**. In nota cu acest titlu dela pagina 92 Vol. XXXIV, D-l M. NICOLAU a dat câte-va aplicaţiuni geometrice care conduc la generarea curbei *„para“*. Iată un caz mai general, extins la o conică, a problemei A a D-lui M. NICOLAU.

Se consideră o conică raportată la axa BB′ *şi tangenta în* B′. *Fie* M *un punct mobil pe conică,* T *intersecţia lui* BM *cu tangenta în* B′. *Perpendiculara din* M′ *pe* B′T *întâlneşte pe aceasta în* N. *Fie* T′ *simetricul lui* T *faţă de mijlocul lui* NB′ *şi* C *un punct fix pe* B′B *aşa fel în cât*

$$2B'C = k.BB'$$

k fiind o constantă. Intersecţia dreptelor T′C *şi* NM descrie *curba* **„para“**.

Ecuaţia conicei este

$$x^2 = 2px + qy^2.$$

Urmând cuvânt cu cuvânt demonstraţia D-lui M. NICOLAU, se găseşte că locul cerut este

$$x^2y^2 = 4k^2\frac{p^3}{q}\left(\frac{y}{k} + \frac{p}{q}\right)$$

adică curba *„para“* generalizată.

EM. GAIU.

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Année XII. No. 6. Sur certains polynomes minimisants, par T. POPOVICIU.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CVIII. Fascicola V. Noemvrie 1929. Buenos-Aires. Mişcarea nebuloaselor spirale, de C. D PERRINE. Funcţiunea lineară, al doilea capitol de geometrie analitică vectorială. de C. C. DASEN.

Journal des mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 54 No. 7. Ianuarie 1930. Două triedre suplimentare au acelaş sens, de V. TH. CARONNET.

Boletin Matematico. Anul II. Noemvrie 1929. Buenos-Aires. Distanţa şi influenţa ei în forma cercului, de B. I. BAIDAFF.

T. Bonnesen. *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes.* Paris. Gauthier Villars et C-ie, Éditeurs. 1929.

Louis Gérard. *Sur le problème de* Malfatti, *le pendule de* Foucault *et autres questions d'analyse et de physique.* Paris. Librairie Vuibert. 1929. Prețul 8 franci.

In o broșură mică, autorul se ocupă mai întâi de problema lui Malfati de a găsi trei cicle x, y, z, pseudo-tangente între ele și tangente fiecare la câte două cicle din trei cicle date. Sunt apoi tratate diferite chestiuni ca reflexiunea pe o oglindă mobilă; aplicație a calculului logaritmic; asupra calculului lui π și e; curenți electrici; postulate asupra numerelor reale și complexe; pendulul sferic; minimum de deviație al prismei; oglinzi sferice, și dioptre; focale; limita superioară a eroarei comise asupra sumei unghiurilor unui triunghiu, care se calculează cunoscând laturile cu table cu 5 zecimale; denumirea unităților.

Broșura conține, cum se vede, observațiuni diverse făcute de autor și care pot interesă pe elevi, studenți și profesorii de matematici și fizică.

I. I.

C. Budeanu. *Quelques considérations sur le rôle physique des puissances instantanées dans un système de production et de distribution de l'énergie électrique.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarast).* Bucureşti. 1929.

D. Barbilian. *Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique de Bucarest.* I-ère Année No. 1—2). Bucureşti 1929.

L. Penenjkevici. *Două enigme în teoria numerelor. Supliment* (în limba rusă).

Acesta e un supliment la broșura de care am vorbit la pag. 101.

Autorul semnalează două erori observate în acea broșură și apoi se ocupă de recenzia ce i-am făcut-o. Arată că exemple ca cele date de mine că $(4^3 + 2^3)$ se împarte cu $(4 - 2)$ se mai pot găsi de tipul Algebric

$$\{[p(n+1)]^m - (pn)^m\} \text{ și în } \{[p(n+1)] - pn\}.$$

Nu am afirmat că nu se găsesc exemple oricâte voim. Iată o clasă mai mare. Diferența $(x^m + y^n)$ se divide cu $(x - y)$?. Algebriceşte nu se poate căci restul ar fi $(y^m + y^n)$. Dacă însă $(x - y) = 1$ se poate. Înmulțind pe x și y cu z, divizibilitatea se menține. Dar dela a găsi așa ceva până la *Teorema lui* Fermat e mare distanță. Au trecut secole cu asemenea încercări și au să mai treacă!

I. I.

CERERI.

186. Pe acum 100 ani ereau la noi oameni culţi care nu ştiau de cât de existenţa a trei operaţiuni aritmetice. A rămas vreun manuscris de aritmetică numai cu descrierea primelor trei operaţiuni aritmetice ?

I. I.

DIVERSE[1])

D-l G. ŢIŢEICA, profesor agreat la Facultatea de ştiinţe din Paris, va face acolo, în cursul lunei Fevruarie, un curs despre *Reţele şi congruienţe.*

Cu începere dela Octomvrie 1930, catedra de Teoria funcţiunilor dela Facultatea de ştiinţe din Bucureşti a fost încredinţată D-lui D. POMPEIU, iar catedra de Mecanică raţională D-lui V. VÂLCOVICI.

D-l N. CIORĂNESCU, doctor în ştiinţele matematice, a fost numit profesor de matematici generale la Şcoala Politehnică din Bucureşti.

Societatea Română de ştiinţe din Bucureşti, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă Luni 13 Ianuarie, ora 21. Au vorbit D-nii O. ONICESCU, asupra problemei lui DIRICHLET şi N. CIORĂNESCU asupra unei expresii a coeficienţilor unei funcţiuni analitice, holomorfe într'un domeniu.

In şedinţa dela 27 Ianuarie au făcut comunicări D-l AL. PANTAZI, asupra deformaţiunilor dealungul traectoriilor ortogonale şi D-l GR. C. MOISIL asupra şirurilor de compoziţie ale grupurilor infinite.

Premiul anual «TRAIAN LALESCU», oferit de *Revista Universitară Matematică*, de sub Direcţiunea D-lui RODOLPHE RACLIS, celor mai distinşi Licenţiaţi în ştiinţele matematice sau Ingineri diplomaţi care au contribuit la activitatea acelei Reviste, a fost decernat, pentru anul 1929 astfel :

Premiul I de 10000 lei D-lui ŞERBAN ŢIŢEICA ; premiul II de 3000 lei D-lui VIRGIL CLAUDIAN, căruia i s'a mai dat în plus 30.000 lei pentru ajutor de cărţi ; premiul III de 2000 lei D-lui N. TEODORESCU. Toţi sunt licenţiaţi ai Facultăţii de ştiinţe din Bucureşti.

Revista *Boletin Matematico* anunţă moartea matematicianului rus N. AGRONOMOFF, unul din vechii corespondenţi străini ai *Gazetei Matematice* şi dela care mai posedăm manuscrise, ce le vom tipări mai târziu.

---

1) Informaţiuni de publicat aci se vor trimite D-lui I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1128. *Se presupune că există nişte insecte care, începând cu vârsta de oră, dau naştere, din oră în oră, la câte o insectă la fel cu ele. Se va presupune că prima insectă apare la începutul unei ore şi că fiecare nu trăeşte mai mult decât 3 ore. Se cere a se calculà în a câtea zi numărul acelor insecte este coprins între* 6×10^{398} *şi* 10^{399}.

V. VÂLCOVICI.

Problema aceasta a fost trimisă de mai mulţi corespondenţi, la intervale îndepărtate; s'a publicat şi o soluţie eronată. Enunţul are însă nevoie de oarecare precizări.

Se spune în enunţ că viaţa maximă a unei insecte este de 3 ore; nu se arată însă care este viaţa minimă. Dacă se admite că insectele pot muri la un moment oarecare din cele trei ore de viaţă maximă, problema devine foarte nedeterminată, căci unele insecte dispar lăsând în locul lor 0, 1, 2 sau chiar 3 alte insecte, dacă se admite că ele mor imediat ce nasc o insectă la ora a treia. Trebuiesc dar unele ipoteze complimentare enunţului, pentru ca soluţiunea problemei să poată fi precisă. Ipotezele care s'au făcut de corespondenţii cari s'au ocupat de această chestiune, sunt următoarele două:

a) Toate insectele mor în ora a treia a vieţii lor, dând naştere numai la câte două insecte.

b) Toate insectele trăiesc exact trei ore şi mor după ce au născut pe a treia insectă.

Să examinăm pe rând fiecare din aceste ipoteze.

I) Prima ipoteză a fost aceea în care s'a pus şi autorul problemei în soluţia care însoţeà problema propusă. Ea a fost adoptată şi de D-l A. LERNER, care a dat o soluţiune bună, cu rezultatul exact, dar care nu s'a publicat la primire, lipsindu-i demonstraţia existenţei soluţiunii.

Să presupunem că numerotăm orele cu numerele 1, 2, 3, 4, . . . , n, ora 1 fiind ora la care apare prima insectă, iar celelalte orele la care se nasc insecte. Fie u'_n numărul insectelor existente imediat după ora n. Moartea insectelor poate aveà loc oricând între orele n şi $(n+1)$. Este evident că u'_n este îndoitul numărului

insectelor care se nasc la ora n, căci fiecare insectă dă naştere alteia. In intervalul dela ora n la ora $(n+1)$ mor toate insectele care s'au născut la ora $(n-3)$. Dacă acum luăm pe u_n ca număr al insectelor ce rămân producătoare după ora n, până la ora $(n+1)$, atunci vom aveà relaţiunea:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-3}. \qquad (1)$$

Putem calculà direct:

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 2 \quad , \quad u_3 = 3 \quad , \quad u_4 = 5 \ldots \qquad (2)$$

Cu ajutorul formulei de recurenţă (1), putem acum calculà mai departe numărul insectelor la diferite ore. Calculul pe această cale este lung pentru n mare. Putem însă înlocuì relaţiunea (1) prin alta. Observăm că avem:

$$u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-3},$$

$$\therefore \quad u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-3} = \ldots$$

$$\ldots = u_3 - u_2 - u_1,$$

$$\therefore \quad u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 3 - 2 - 1 = 0,$$

$$\therefore \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \qquad (3)$$

Aceasta este însă relaţia de recurenţă a şirului lui FIBONACCI. Numărul insectelor din fiecare oră formează dar şirul lui FIBONACCI, cu singura deosebire că din acest şir lipsesc primii doi termeni 0 şi 1. Chestiunea dar se reduce acuma la a calculà care este termenul acestui şir coprins între 6×10^{398} şi 10^{399}. Se pune însă mai întâiu chestiunea dacă între aceste limite există un asemenea termen în şirul lui FIBONACCI.

Se ştie (vezi *Culegere de probleme. Aritmetica I.* 20) că în şirul lui FIBONACCI sunt cel puţin patru şi cel mult cinci termeni consecutivi care au un acelaş număr de cifre. Zicem că dintre acestea ultimul începe cu 6, 7, 8 sau 9, şi că prin urmare acela ar puteà fi cuprins între limitele date la numerele de 399 cifre. După relaţiune (1) se vede că un termen al şirului întrece pe îndoitul precedentului. Cel mai mic număr de m cifre este 10^{m-1}. Precedentul lui este dar cel puţin $5 \times 10^{m-2} + 1$. Următorii sunt cel puţin $15 \times 10^{m-2} + 1$; $25 \times 10^{m-2} + 1$; $40 \times 10^{m-2} + 2$, $65 \times 10^{m-2} + 3$. Deci ultimul începe cel puţin cu 6, ceeace ereà de arătat.

Se ştie că dacă începem şirul lui FIBONACCI cu 1, 1, 2, 3, 5 ..., atunci avem:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (4)$$

Insă $(1-\sqrt{5})/2 = 0{,}61803\ldots$ ridicat la puteri mari devine foarte mic. Astfel pentru $n = 1000$, făcând calculul cu logaritmi, se găseşte că prima cifră semnificativă după virgulă, a lui $0{,}61803\ldots^n$ este de rangul al 209-lea. Pentru n mare putem dar luà:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \log u_n = n \,.\, \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\log 5,$$

$$\therefore \quad \log u_n = n \,.\, \log 1{,}61803\ldots - 0{,}3494850,$$

$$\therefore \quad n \,.\, \log 1{,}61803 - 0{,}349485 < \log u_n < n \,.\, \log 1{,}61804 - 0{,}349485,$$

şi cum u_n este cuprins între 6×10^{398} şi 10^{399}, reiese că avem:

$$\frac{\log 6 + 398{,}349485}{\log 1.61804} < n < \frac{399{,}349485}{\log 1{,}61803}$$

$$1908 < n < 1911.$$

Cum numărul insectelor din diferitele ore este numerele din şirul lui FIBONACCI, lăsând primul termen 1 la o parte, reiese că numărul de insecte cerut de enunţ se realizează între a 1907-a şi 1910-a oră dela apariţia primei insecte. Aceste numere, divizate prin 24 (numărul orelor dintr'o zi) ne dau câtul 79. Aşà dar, în definitiv, putem afirmà că numărul cerut de insecte se va realizà în a 80-a zi dela aparitiunea primei.

Se vede că exponentul n este foarte mare şi că prin urmare neglijarea celui de al doilea termen din expresiunea (4) este cu totul îndreptăţită.

(Va urmà). I. I.

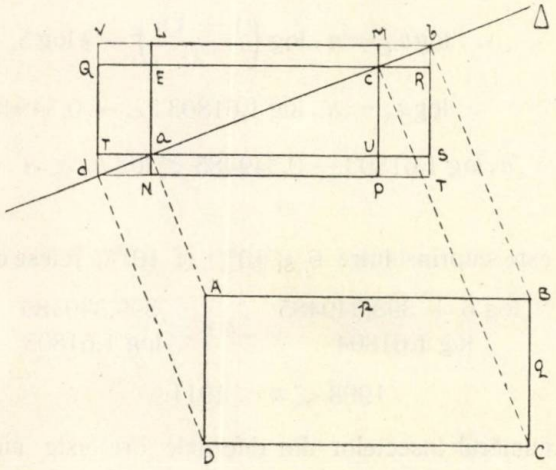
PROBLEMA 2544. *Vârfurile* A, B, C, D *ale unui dreptunghiu se proiectează pe o dreaptă în* a, b, c, d. *Prin* a *se duc paralele la* BC, DC *şi la fel prin celelalte trei proiecţiuni. Să se arate că cele două dreptunghiuri formate sunt echivalente.*

In ce caz aceste dreptunghiuri sunt asemeni cu dreptunghiul primitiv?

Să se examineze cazul particular al patratului.

D. PERIEŢEANU.

Fie p, q dimensiunile dreptunghiului dat şi α unghiul pe care-l face dreapta dată Δ cu direcţia AB.



Consider dreptunghiurile LMNP şi QRST de pe figură din acelea construite în condiţiile problemei.

Pe figură se vede că

$$LM = ac \cdot \cos\alpha \quad \text{şi} \quad MP = db \cdot \sin\alpha$$

$$QR = db \cdot \cos\alpha \quad \text{şi} \quad RS = ac \cdot \cos\alpha$$

$$\therefore \quad LM \times MP = QR \times RS = ac \cdot db \cdot \sin\alpha \cos\alpha.$$

Insă

$$(1) \qquad ac = p\cos\alpha - q\sin\alpha$$

$$(2) \qquad db = p\cos\alpha + q\sin\alpha$$

așa că suprafața comună a celor 2 dreptunghiuri echivalente este

$$\Sigma = LM \cdot MP = QR \cdot RS = (p^2 \cos^2\alpha - q^2 \sin^2\alpha) \sin\alpha \cos\alpha.$$

In cazul patratului, această suprafață devine

$$\Sigma' = \frac{p^2 \sin 4\alpha}{4}.$$

Pentru cazurile de asemănare trebuie să avem

$$\frac{LM}{MP} = \frac{p}{q} \quad \text{sau} \quad \frac{LM}{MP} = \frac{q}{p}$$

și

$$\frac{QR}{RS} = \frac{p}{q} \quad \text{sau} \quad \frac{QR}{RS} = \frac{q}{p}.$$

Ținând seamă de (1) și (2) aceste condiții devin succesiv.

$$(3) \qquad \frac{(p\cos\alpha - q\sin\alpha)\cos\alpha}{(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{p}{q}$$

$$(4) \qquad \frac{(p\cos\alpha - q\sin\alpha)\cos\alpha}{(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{q}{p}$$

$$(5) \qquad \frac{(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\cos\alpha}{(p\cos\alpha - q\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{p}{q}$$

$$(6) \qquad \frac{(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\cos\alpha}{(p\cos\alpha - q\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{q}{p}.$$

Cazul (3) conduce la soluția totdeauna posibilă pentru α

$$(7) \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2pq}{p^2 + q^2}.$$

Cazul (4) conduce la ecuația

$$(8) \qquad q^2 \operatorname{tg}^2\alpha + 2pq \operatorname{tg}\alpha - p^2 = 0$$

care admite totdeauna rădăcini reale în $\operatorname{tg}\alpha$.

Cazul (5) conduce la

$$(9) \qquad \sin 2\alpha = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$$

care este posibilă numai dacă

$$\left|\frac{2pq}{p^2 - q^2}\right| \geqslant 1.$$

Cazul (6) conduce la

$$p^2 \cos^2\alpha + q^2 \sin^2\alpha = 0$$

care este imposibilă pentru valori reale.

In concluzie sunt drepte Δ pentru care dreptunghiul ABCD poate să fie asemeni cu unul din dreptunghiurile LMNP sau QRST.

In cazul patratului

(7) devine $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$

(8) „ $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

(9) „ $\sin 2\alpha = \infty$ imposibilitate.

Observaţiuni.

1°. Soluţia aceasta a fost redijată după soluţia propunătorului problemei pentru că enunţul nu precizează în toate punctele lui ceeace a vroit să înţeleagă propunătorul. Astfel enunţul nu precizează care din dreptunghiurile figurei sunt echivalate.

Apoi din întrebarea a doua ar reeşi că dreptunghiul primitiv trebuie să fie asemenea simultan cu cele 2 dreptunghiuri. In acest caz relaţiile (3) şi (5) de exemplu ar trebui să fie simultane, ceeace conduce la simultaneitatea lui (7) cu (9). Eliminând în acest caz pe α între (7) şi (9) se găseşte ca relaţie de condiţie între p şi q:

$$8p^2q^2 = 0$$

care reduce dreptunghiul ABCD la o dreaptă.

2°. Au rezolvat foarte bine şi complet problema, arătând că dreptunghiurile aEQT şi ELMc sunt echivalente şi interpretând enunţul în sensul că aceste dreptunghiuri sunt simultan asemeni cu dreptunghiul primitiv D-nii: C. I. Georgescu şi St. I. Mihăiescu.

D-l C. I. Georgescu a determinat, pentru unele cazuri şi valorile numerice ale raportului p/q.

3°. D-nii: C. C. Popovici şi Şt. D. Lepădătescu au demonstrat echivalenţa aceloraşi dreptunghiuri ca la 2°, dar nu au studiat complet cazurile de asemănare.

4°. Echivalenţa a 2 din dreptunghiuri se poate arătă pur geometrfc. Din

$$bc = ad$$

rezultă egalitatea triunghiurilor dTa, cMb deci egalitatea dreptunghiurilor dTaN, QVLE, cMbR, PUST apoi ELMc egal cu NaUP şi aTQE cu cRSU. Consider acum triunghiurile aSb şi cPd pe care le descompun astfel:

$$a\text{S}b = a\text{U}c + c\text{R}b + c\text{RTU}$$

$$d\text{P}c + a\text{U}c + d\text{N}a + a\text{UPN}.$$

In aceste egalităţi membrii întâi sunt egali şi primele două părţi ale membrilor al doilea sunt de asemeni egali deci

$$c\text{RTU} = a\text{UPN}.$$

De aici se deduce imediat şi echivalenţa dreptunghiurilor NLMP şi TQRS.

Gh. B.

PROBLEMA 3388. *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţiunea*

$$\frac{r_a(2R - r_b)] + r_b(2R - r_c) + r_r(2R - r_a)}{a + b + c} = (R - r)\frac{ar_a^2 + br_b^2 + cr_c^2}{a^2r_a + b^2r_b + c^2r_c}.$$

M. GHELBER.

I. *Soluţie* dată de D-nii: TH. V. DIACONESCU, CEZAR COŞNIŢĂ, GR. MAREŞ, GH. TH. GHEORGHIU, C. I. ISTINIE-BREZUICA, VAL. NOVACU, I. C. VASILIU.

Folosind relaţiile

$$(p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = pr \quad ; \quad \Sigma r_a = 4R + r \; ;$$

$$\Sigma r_a r_b = p^2.$$

putem scrie succesiv

$$ar_a^2 + br_b^2 + cr_c^2 = \Sigma ar_a^2 = p\,\Sigma r_a^2 - \Sigma(p - a)r_a^2$$

$$= p[(\Sigma r_a)^2 - 2\Sigma r_a r_b] - pr\Sigma r_a = p[\Sigma r_a(\Sigma r_a - r) - 2\Sigma r_a r_b]$$

$$= p[(4R + r)^2 - 2p^2 - 4Rr - r^2] = 2p[8R^2 + 2Rr - p^2].$$

De unde putem scrie

$$\Sigma ar_a^2 = 2p(\Sigma 2Rr_a - \Sigma r_a r_b) = 2p\,\Sigma r_a(2R - r_b).$$

Deci:

$$(1) \qquad ar_a^2 + br_b^2 + cr_c^2 = 2p[r_a(2R - r_b) + r_b(2R - r_c) + r_c(2R - r_a)].$$

Tot astfel ţinând seamă că

$$\Sigma ar_a = (2R - r)(a + b + c)$$

avem

$$a^2r_a + b^2r_b + c^2r_c = \Sigma a^2r_a = p\,\Sigma ar_a - \Sigma a(p - a)r_a$$

$$= p(2R - r)(a + b + c) - pr(a + b + c) = 2p(R - r)(a + b + c)$$

$$= 4(R - r)p^2.$$

(Gaz. Mat. XXIX. p. 113).

De unde putem scrie

(2) $\quad a^2r_a + b^2r_b + c^2r_c = 2p(R - r)(a + b + c).$

Din relaţiile (1) şi (2) prin împărţire şi schimbând părţile se ajunge uşor la relaţia din enunţ.

II. *Soluţie* dată de D-nii: Th. Stoicescu şi Hulubei Telemac (laşi).

Partea întâia a relaţiei din enunţ are drept valoare

$$\frac{1}{2p}[2R(4R + r) - p^2].$$

Pentru calculul părţei a doua utilizăm formula

$$\Sigma a^2r_a = 4p^2(R - r)$$

(G. M. XXIX. pag. 113)

şi calculăm suma Σar_a^2 ţinând seama de relaţiile

$$a = 4R \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}A, \ldots \quad \text{şi} \quad r_a = p \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A, \ldots$$

Avem succesiv

$$\sum ar_a^2 = 4Rp^2 \sum \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}A \frac{\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A} = 4Rp^2 \sum \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}A$$

$$= 4Rp^2 \Sigma (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}A) = 4Rp^2 \Sigma \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - 4Rp^2 \Sigma \tfrac{1}{2}\sin A.$$

Dar

$$\Sigma \sin A = 4 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C \quad \text{şi} \quad p = 4R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

Deci

$$\sum ar_a^2 = 4Rp^2 \frac{r_a + r_b + r_c}{p} - 4Rp^2 . 2 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= 4Rp(4R + r) - 2p^3 = 2p(2Rr + 8R^2 - p^2).$$

Partea a doua a relaţiei din enunţ devine aşa dar

$$(R - r)\frac{\Sigma ar_a^2}{\Sigma a^2r_a} = (R - r)\frac{4Rp(4R+r) - 2p^3}{4p^2(R - r)} = \frac{2R(4R + r) - p^2}{2p}$$

egală cu valoarea părţii întâia.

Observații:

1. D-nul Gh. M. Călin a rezolvat problema stabilind relația

$$\Sigma\, ar_a^2 = 2p\left(2Rr + 8R^2 - p^2\right)$$

servindu-se de relațiile

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \text{ etc.} \ldots \qquad s^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$$

$$\Sigma\, ab = p^2 + r^2 + 4Rr \qquad \text{și} \qquad abc = 4Rs;$$

iar D-l Barbu V. Gataianțu s'a servit de relația

$$\Sigma\, ar_a^2 = 2p\left(8R^2 + 2Rr - p^2\right)$$

scriind că este cunoscută fără a o demonstrà sau indicà locul unde se găsește demonstrată.

2. Relația din enunț, din eroare, s'a publicat greșită când s'a propus. Domnii: René I. Spathy, P. Ghișoiu, I. Nicolau-Dobridor și Gh. Munteanu au relevat această eroare.

Locot.-Col. Gh. I. L.

PROBLEMA 3629. *Fie ecuațiile*

$$x^n + A_p\, x^{n-p} + \ldots + A_{n-1}\, x + A_n = 0$$

$$x^n + B_p\, x^{n-p} + \ldots + B_{n-1}\, x + B_n = 0$$

cari au o rădăcină comună de ordinul (n—p) *de multiplicitate. Să se demonstreze că dacă pentru un* k *oarecare*

$$A_{p+k} = B_{p+k}$$

atunci cele două ecuații au toate rădăcinile comune.

† O. Popea.

Fie $A(x) = 0$ și $B(x) = 0$ cele două ecuații; putem scrie

$$A(x) = (x-\alpha)^{n-p}\, P(x)$$

$$B(x) = (x-\alpha)^{n-p}\, Q(x)$$

$$(1) \qquad \therefore \qquad A(x) - B(x) = (x-\alpha)^{n-p}\,(P - Q)$$

și

$$(2)\quad (x-\alpha)^{n-p}(P-Q) = x^{n-p}(A_p - B_p) + \ldots + A_n - B_n$$

$$\therefore \qquad P - Q = \text{const} = q$$

şi

$$A_p - B_p = q$$

$$A_{p+1} - B_{p+1} = -\alpha q\, C_{n-p}^{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{p+k} - B_{p+k} = (-1)^k \alpha^k q\, C_{n-p}^{k}$$

deci dacă

$$A_{p+k} - B_{p+k} = 0.$$

atunci $q = 0$ şi urmează

$$A_p = B_p\,, \qquad A_{p+1} = B_{p+1},\ \text{etc.}\ldots$$

adică

$$A(x) \equiv B(x).$$

Notă. D-nii: Gh. Gheorghiu-Gladiş, Pomp. Ionescu, Sorin Iscu şi I. Panţu au interpretat enunţul în sensul că coeficienţii A şi B sunt egali pentru valorile succesive ale lui k ceeace e inexat după cum se vede din demonstraţia de mai sus, pe lângă că, în cazul considerat de Domniile lor, problema este evidentă.

M. G.

PROBLEMA 3672. *Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cele 9 cifre semnificative ale sistemului zecimal, să se formeze 3 numere de câte 3 cifre diferite care să verifice egalitatea*

$$abc = def - ghi.$$

Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de D-l E. Mihalcea (student).

Egalitatea din enunţ se mai poate scrie

$$(1)\qquad abc + ghi = def.$$

Din efectuarea adunării va trebui să avem

$$(2)\ c + i = 10r + f\ ;\ b + h + r = 10s + e\ ;\ a + g + s = d.$$

Suma celor 9 cifre semnificative este

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45$$

de unde, ţinând seamă de (2), se găseşte

$$(3)\qquad 2(d + e + f) + 9(r + s) = 45.$$

Membrul întâi al acestei egalități, în numere întregi, trebuind să fie nepereche, urmează că și $r+s$ este nepereche. Cum r și s nu au valori mai mari ca 1, urmează că vom aveà

$$\text{I.} \quad \begin{cases} r=0 \\ s=1 \end{cases} \qquad \text{sau} \qquad \text{II.} \quad \begin{cases} r=1 \\ s=0 \end{cases}$$

Cu acestea, egalitățile (2) și (3) devin:

Pentru cazul I:

(4) $c+i=f$; (5) $b+h=10+e$

(6) $a+g+1=d$; (7) $d+e+f=18$

Pentru cazul II:

(8) $c+i=10+f$; (9) $b+h+1=e$

(10) $a+g=d$; (7) $d+c+f=18.$

Să examinăm cazul I. Se observă din (4), (5) și (6) că

(11) $f>2$; $e<8$; $d>3.$

Voi da lui f toate valorile dela 3 la 9 inclusiv și voi deduce valorile celorlalte cifre, observând restricțiile impuse de neegalitățile (11).

Fie $f=3$. Egalitățile (5), (6) și (7) dau, corespunzător acestei valori:

$$f=3 \quad \begin{cases} c=2\ ;\ 1 \\ i=1\ ;\ 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} d+e=15 \begin{cases} d=9\ ;\ 8. \\ e=6\ ;\ 7. \end{cases} \\ a+g=8\ ;\ 7. \\ b+h=16\ ;\ 17. \end{cases}$$

Numesc acest tabel, tabelul f_3. Se vede că în f_3 nu sunt date valorile cifrelor a, g și a cifrelor b, h. Aceste valori se pot deduce însă ușor. Cifrele b, h de exemplu, care să fie diferite și să aibă suma 16 sunt numai 9,7 , sau cifrele diferite a, g a căror sumă este 8 sunt (7,1) , (6,2) , (5,3). Mai observ că în egalități de felul

$$a+g=8 \qquad \text{sau} \qquad b+h=16$$

unei soluții (a, g) îi corespunde și o soluție (g, a).

Excepție face grupul (d, e) ale căruia sisteme de soluții sunt toate înscrise in tabelul f_3 pentru că d și e sunt impuse restricțiilor (11).

Cu acestea, construesc din f_3 următorul tabel al valorilor ce se corespund, pentru cele 9 cifre; în prima coloană a tabelului înscriind grupele de câte 2 cifre, cifrele din grup putând aveà ca valoare pe rând ambele valori numerice din casele de pe aceiași linie cu grupa, afară de grupa *de* unde *d* are prima valoare și *e* pe cea de a doua, în ordinea în care sunt înscrise în tabela T_3.

T_3:

f	3	3	3	3	3	3
de	9,6	9,6	9,6	8,7	8,7	8,7
ci	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
ag	7,1	6,2	5,3	6,1	5,2	4,3
bh	9,7	9,7	9,7	9,8	9,8	9,8

Vor da soluții pentru problemă numai acele coloane care au toate cifrele între ele, ceeace nu este cazul la acest tabel. Deci pentru f_3 nu avem soluții.

Pentru $f = 4$, avem

$$f=4 \begin{cases} c=3\ ,\ 1 \\ i=1\ ,\ 3 \end{cases} \left| \begin{array}{r} d+e=14 \begin{cases} d= 9\ ;\ 8 \\ e= 5\ ;\ 6 \end{cases} \\ a+g= 8\ ;\ 7 \\ b+h=15\ ;16 \end{array} \right.$$

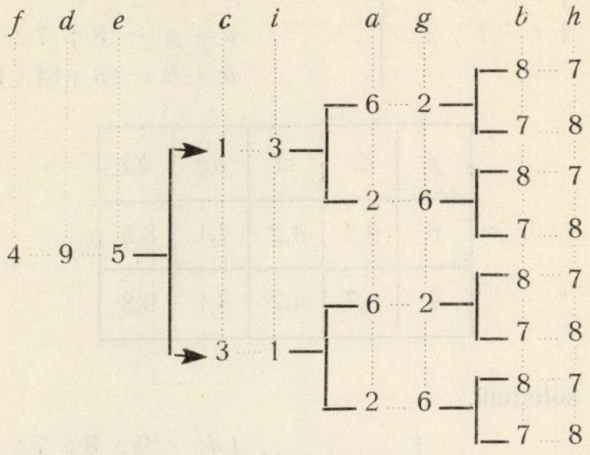
de unde se deduce tabloul

T_4:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
f	4	4	4	4	4	4	4	4	4
de	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	8,6	8,6	8,6
ci	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1
ag	7,1	6,2	5,3	7,1	6,2	5,3	6,1	5,2	4,3
bh	9,6	9,6	9,6	8,7	8,7	8,7	9,7	9,7	9,7

Se vede că dau soluțiuni numai coloanele VI și IX. O coloană dă 8 soluții, deci pentru f_4 avem 16 soluțiuni.

Pentru găsirea tuturor soluțiunilor corespunzătoare unei coloane construesc schema analoagă aceleia al valențelor în chimie. Pentru cazul coloanei VI avem :



Cu acest grafic se pot formă ușor cele 16 sisteme de numere *abc, def, ghi* care răspund enunțului.

Procedând la fel și pentru celelalte valori ale lui *f*, avem rezultatele care urmează.

$$f = 5 \begin{cases} c = 4\ ;\ 3 \\ i = 1\ ;\ 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{r} d + e = 13 \begin{cases} d = 9\ ;\ 8\ ;\ 7\ ;\ 6 \\ e = 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7 \end{cases} \\ a + g = 8\ ;\ 7\ ;\ 6\ ;\ 5 \\ b + h = 14\ ;\ 15\ ;\ 16\ ;\ 17 \end{array} \right.$$

de unde deduc tabelul T_5 în care s'au înscris numai coloanele care dau soluții.

T_5 :

f	*de*	*ci*	*ag*	*bh*
5	9,4	3,2	7,1	8,6
5	6,7	3,2	4,1	9,8
5	6,7	4,1	3,2	9,8

f_5 dă prin urmare 24 soluții.

Avem apoi

$$f=6 \begin{cases} c=5\ ;\ 4 \\ i=1\ ;\ 2 \end{cases} \begin{cases} d+e=12 \begin{cases} d=\ 9\ ;\ 8\ ;\ 7\ ;\ 5 \\ e=\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 7 \end{cases} \\ a+g=\ 8\ ;\ 7\ ;\ 6\ ;\ 4 \\ b+h=13\ ;14\ ;15\ ;17 \end{cases}$$

T_6:

f	de	ci	ag	bh
6	9,3	4,2	7,1	8,5
6	5,7	4,2	3,1	9,8

f_6 dă 16 soluțiuni.

$$f=7 \begin{cases} c=6\ ;\ 5\ ;\ 4 \\ i=1\ ;\ 2\ ;\ 3 \end{cases} \begin{cases} d+e=11 \begin{cases} d=\ 9;\ 8;\ 7;\ 6;\ 5:\ 4 \\ e=\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7 \end{cases} \\ a+g=\ 8;\ 7;\ 6;\ 5;\ 4;\ 3 \\ b+h=12\ ;13\ ;14\ ;15\ ;16\ ;17 \end{cases}$$

T_7:

f	de	ci	ag	bh
7	9,2	6,1	5,3	8,4
7	8,3	6,1	5,2	9,4
7	8,3	5,2	6,1	9,4

f_7 dă 24 soluțiuni.

$$f=8 \begin{cases} c=7\ ;\ 6\ ;\ 5 \\ i=1\ ;\ 2\ ;\ 3 \end{cases} \begin{cases} d+e=10 \begin{cases} d=\ 9\ ;\ 8\ ;\ 7\ ;\ 6\ ;\ 4 \\ e=\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6 \end{cases} \\ a+g=\ 8\ ;\ 7\ ;\ 6\ ;\ 5\ ;\ 3 \\ b+h=11\ ;12\ ;13\ ;14\ ;16 \end{cases}$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

T_8 :

f	8	8	8	8	8
de	9,1	9,1	7,3	6,4	4,6
ci	6,2	5,3	6,2	7,1	5,3
ag	5,3	6,2	5,1	3,2	2,1
bh	7,4	7,4	9,4	9,5	9.7

f_8 dă deci 40 soluţiuni.

$$f=9\begin{cases} c=8;7;6;5 \\ i=1;2;3;4 \end{cases} \quad \begin{cases} d+e=9 \begin{cases} d=8;7;6;5;4 \\ e=1;2;3;4;5 \end{cases} \\ a+g=7;6;5;4;3 \\ b+h=11;12;13;14;15 \end{cases}$$

T_9 :

f	9	9	9	9	9	9
de	8,1	8,1	7,2	6,3	5,4	4,5
ci	7,2	6,3	6,3	7,2	7,2	6,3
ag	4,3	5,2	5,1	4,1	3,1	2,1
bh	6,5	7,4	8,4	8,5	8,6	8,7

Deci f_9 dă 48 soluţiuni.

In total cazul I dă 168 soluţiuni.

Trecem la cazul II. Egalităţile (8), (9) şi (10) impun

$$f<8 \quad ; \quad e>3 \quad ; \quad d>2.$$

De data aceasta se face să varieze d dela 3 la 9 inclusiv şi se construesc tablourile f_n şi T_n ca şi la cazul I.

Din cauza simetriei, soluţiile cazului II se deduc din acelea ale cazului I prin o simplă rotaţie de cifre, felul cum se deduc ci-

frele soluțiilor II din acelea ale soluțiilor I sunt înscrise în tabelul următor :

Cazul I	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Cazul II	*c*	*a*	*b*	*f*	*d*	*e*	*i*	*g*	*h*

Se vede că soluțiile cazului II sunt diferite de ale cazului I. Problema admite în total 336 soluțiuni.

Iată tabloul complect al soluțiunilor cazului I, aranjate în ordinea crescândă a lui *abc*.

142 = 738 — 596
142 = 837 — 695
143 = 729 — 586
145 = 837 — 692
146 = 729 — 583
146 = 738 — 592
152 = 639 — 487
152 = 936 — 784
154 = 936 — 782
157 = 639 — 482
162 = 549 — 387
162 = 945 — 783
163 = 945 — 782
167 = 549 — 382
173 = 459 — 286
173 = 468 — 295
175 = 468 — 293
176 = 459 — 283
182 = 549 — 367
182 = 576 — 394
182 = 639 — 457
182 = 675 — 493
182 = 936 — 754
182 = 945 — 763
183 = 459 — 276
183 = 675 — 492
183 = 729 — 546
183 = 945 — 762
184 = 576 — 392
184 = 936 — 752
186 = 459 — 273
186 = 729 — 543

187 = 549 — 362
187 = 639 — 452
192 = 576 — 384
192 = 675 — 483
192 = 738 — 546
192 = 837 — 645
193 = 468 — 275
193 = 675 — 482
194 = 576 — 382
195 = 468 — 273
195 = 837 — 642
196 = 738 — 542
241 = 837 — 596
243 = 819 — 576
243 = 918 — 675
245 = 918 — 673
246 = 819 — 573
246 = 837 — 591
251 = 648 — 397
257 = 648 — 391
271 = 864 — 593
271 = 954 — 683
273 = 459 — 186
273 = 468 — 195
273 = 819 — 546
273 = 864 — 591
273 = 918 — 645
273 = 954 — 681
275 = 468 — 193
275 = 918 — 643
276 = 459 — 183
276 = 819 — 543

281 = 675 — 394
281 = 954 — 673
283 = 459 — 176
283 = 954 — 671
284 = 675 — 391
286 = 459 — 173
291 = 648 — 357
291 = 675 — 384
291 = 837 — 546
291 = 864 — 573
293 = 468 — 175
293 = 864 — 571
294 = 675 — 381
295 = 468 — 173
296 = 837 — 541
297 = 648 — 351
341 = 927 — 586
342 = 918 — 576
346 = 918 — 572
346 = 927 — 581
351 = 648 — 297
352 = 819 — 467
357 = 648 — 291
357 = 819 — 462
362 = 549 — 187
362 = 819 — 457
367 = 549 — 182
367 = 819 — 452
372 = 918 — 546
376 = 918 — 542
381 = 675 — 294
381 = 927 — 546

382 = 549 — 167	541 = 837 — 296	592 = 738 — 146
382 = 576 — 194	541 = 927 — 386	593 = 864 — 271
384 = 576 — 192	542 = 738 — 196	596 = 738 — 142
384 = 675 — 291	542 = 918 — 376	596 = 837 — 241
386 = 927 — 541	543 = 729 — 186	642 = 837 — 195
387 = 549 — 162	543 = 819 — 276	643 = 918 — 275
391 = 648 — 257	546 = 729 — 183	645 = 837 — 192
391 = 675 — 284	546 = 738 — 192	645 = 918 — 273
392 = 576 — 184	546 = 819 — 273	671 = 954 — 283
394 = 576 — 182	546 = 837 — 291	673 = 918 — 245
394 = 675 — 281	546 = 918 — 372	673 = 954 — 281
397 = 648 — 251	546 = 927 — 381	675 = 918 — 243
452 = 639 — 187	571 = 864 — 293	681 = 954 — 273
452 = 819 — 367	572 = 918 — 346	683 = 954 — 271
457 = 639 — 182	573 = 819 — 246	692 = 837 — 145
457 = 819 — 362	573 = 864 — 291	692 = 837 — 145
462 = 819 — 357	576 = 819 — 243	695 = 837 — 142
467 = 819 — 352	576 = 918 — 342	752 = 936 — 184
482 = 639 — 157	581 = 927 — 346	754 = 936 — 182
482 = 675 — 193	583 = 729 — 146	762 = 945 — 183
483 = 675 — 192	586 = 729 — 143	763 = 945 — 182
487 = 639 — 152	586 = 927 — 341	782 = 936 — 154
492 = 675 — 183	591 = 837 — 246	782 = 945 — 163
493 = 675 — 182	591 = 864 — 273	783 = 945 — 162
		784 = 936 — 152

Observaţiuni. 1°. In afară de d-l E. MIHALCEA nu a mai dat nimeni numărul complect de soluţiuni. Soluţia D-lui E. MIHALCEA, diferă în ce priveşte dispoziţia calculelor şi tabelelor, de cea dată mai sus, este însă un model de expunere ordonată şi de acurateţă. Numai ordinea, atenţia şi examinarea migăloasă a tuturor cazurilor posibile poate rezolvà complect o problemă de felul acesteia.

2°. Au rezolvat parţial problema, dând numărul de soluţii scris în paranteză în urma numelui, D-nii: I. C. CRISTESCU-POTLOGI (304), D. ŞERBAN-ULMENI şi GH. O. ZAMFIRESCU (300), E. BURLACU (272), I. C. VOICU (182), I. N. CONSTANTINESCU şi N. N. VELICESCU (112), H. P. IONESCU (96), GH. M. PĂUN (81), I. V. SASSU (76), I. MURĂROIU (72), I. C. SAVIN (64), I. C. SAVIN (52), P. I. GHIŞOIU (24), C. D. MELINTE (4).

3°. Au dat numai tabele de soluţiuni, fără să arate cum au găsit acele soluţiuni D-nii: GH. P. BOERESCU (365 ?), I. GH. POPA (308), I. N. ALIMAN (117), N. COSTACHE (88).

4°. D-l C. I. ISTINIE-BREZUICA a demonstrat (?) că *„problema nu admite soluţii“*.

PROBLEMA 3822. *Trouver une quatrième puissance exacte telle que le nombre formé par ses quatre chiffres à droite egale sa quatrième racine.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l I. G. BULANCEA (Clasa VI, Liceul Internat, Iaşi).

Fie $N = mszu$, aşa ca N^4 să se termine cu $mszu$. Pentru aceasta trebuie mai întâiu ca u^4 să se termine cu u, apoi ca $(zu)^4$ să se termine cu (zu), ca $(szu)^4$ să se termine cu (szu) şi în fine ca $(mszu)^4$ să se termine cu $(mszu)$. Dar u^4 nu se termină cu u decât dacă u este 0, 1, 5 sau 6. Să examinăm pe rând aceste patru cazuri.

1) $u = 0$. Dacă N se termină cu 0, atunci N^4 se va termină cu 0000 şi deci $(mszu) = 0000$. De aci *soluţia formală:*

$$0000^4 = 000\ldots.0000$$

2) $u = 1$. Să determinăm mai întâiu pe z aşa ca $(z1)^4$ să se termine cu $(z1)$. Dar $(z1)^2 = (10z + 1)^2 = 100\,z^2 + 20\,z + 1$ are ultimele două cifre ca şi ale lui $(20z + 1)$. Deci $(z1)^4$ va avea aceleaşi două cifre la urmă ca şi $(20z + 1)^2 = 400z^2 + 40z + 1$, adică ca ale lui $(40z + 1)$. Zecile acestui număr sunt unităţile lui $4z$. Dar, după condiţiunea problemei, zecile lui N^4 trebuie să fie z. De aci reiese că $4z$ trebuie să se termine cu z, sau că $(4z - z)$ să se termine cu 0, sau ca $3z$ să se termine cu 0. Dar aceasta nu se poate decât dacă $z = 0$.

Trebuie acum să determinăm pe s aşa ca $(s01)^4$ să se termine cu $(s01)$. Un studiu absolut analog cu precedentul ne duce la $s = 0$. Apoi în mod analog găsim şi $m = 0$.

De aci rezultă *soluţia formală:*

$$0001^4 = 000\ldots0001.$$

3) $u = 5$. In acest caz $(z5)^2 = (10z + 5)^2 = 100z^2 + 100z + 25$ are ultimele două cifre 25. Dar $25^2 = 625$ are 2 la zeci. Deci $z = 2$.

Numărul $(s25)^2 = (100s + 25)^2 = 10000s^2 + 5000s + 625$ are pe 625 ca ultimele trei cifre. Ridicăm pe acesta la patrat, calcu-

lându-i pentru simplificare numai ultimele trei cifre, şi găsim 625. Deci $s = 6$.

Numărul căutat este dar $m625$, sau $(1000m + 625)$. Ridicăm pe acesta la patrat oprind numai elementele care interesează ultimele patru cifre. Găsim că ultimele patru cifre ale lui N^2 sunt 0625 şi că tot acestea sunt şi ale lui N^4. Deci $m = 0$ de unde iese *soluţia formală:*

$$0625^4 = 390625.$$

4) $u = 6$. Procedăm în mod analog. Găsim că $(z6)^2$ are ultimele două cifre dela dreapta ca şi numărul $(20z + 36)$ şi apoi că $(zu)^4$ are ultimele două cifre ca şi $(40z + 96)$. Zecile acestui număr sunt unităţile lui $(4z + 9)$, care trebuie să fie z. De aci reiese că $4z + 9 - z = 3\,(z + 3)$ trebuie să se termine cu 0. Deci $z = 7$.

Să căutăm acum pe s. Ultimele trei cifre ale lui $(s76)^2$ sunt ca şi ale lui $(200s + 776)$, iar ale lui $(s76)^4$ ca ale lui $(400s + 176)$. Sutele acestui număr sunt unităţile lui $(4s + 1)$, care trebuie să fie s. Deci $(4s + 1 - s) = 3s + 1$ trebuie să se termine cu 0. Deci $s = 3$.

In fine să determinăm pe m. Numărul $(m376)^2$ se termină cu aceleaşi patru cifre ca şi $(2000m + 1376)$ iar $(m376)^4$ ca şi numărul $(4000m + 3376)$. Cifra miilor acestui număr este unităţile lui $(4m + 3)$, şi aceasta trebuie să fie m. Deci $(4m + 3 - m) = 3(m + 1)$ trebuie să se termine cu 0. De aci rezultă $m = 9$ şi avem prin urmare *soluţia efectivă:*

$$9376^4 = 7728058388709376.$$

Aceasta e dar singura soluţie a problemei propuse.

Remarque. La question: *„Trouver un cube sachant que le nombre formé par ses trois chiffres à droite égale sa racine cubique"* admet les solutions: 125^3, 249^3, 251^3, 375^3, 376^3, 499^3, 501^3, 624^3, 625^3. 749^3, 751^3, 875^3.

V. Thébault.

PROBLEMA 3831. *Cari numere zecimale înmulţite cu* **6**, *dau numere întregi scrise cu trei cifre consecutive?*

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: ILIE N. ALIMAN N. N. COSTACHE, G. M. PĂUN, D. M. POPESCU, AL. C. RAICU, D. ŞERBAN, N. VOICU (Liceul Oltenița) şi I. PARAJEANU (Liceul Braşov).

Numerile formate cu trei cifre consecutive sunt:

102	123	234	345	456	567	678	789
120	132	243	354	465	576	687	798
210	213	324	435	546	657	768	879
201	231	342	453	564	675	786	897
	312	423	534	645	756	867	978
	321	432	543	654	765	876	987

Alegem acum numai numerile nedivizibile cu *2* şi împărţindu-le cu *6* obţinem soluţiunile:

20,5; 33,5; 35,5; 38,5; 40,5; 53,5; 57,5; 70,5;
72,5; 75,5; 77,5; 90,5; 94,5; 107,5; 109,5; 112,5;
114,5; 127,5; 131,5; 144,5; 146,5; 149,5; 164,5.

Observaţiuni:

1. D-l MOŢOC a găsit numai 21 de soluţiuni.

2. D-l M. I. FLEISCHER, a găsit pe cale algebrică *8* soluţiuni.

3. D-l I. BOIAN interpretând că numerile scrise cu trei cifre consecutive sunt în ordinea crescândă, găseşte *4* soluţiuni.

4. D-nii: P. GHIŞOIU, AL. RAICU şi D. ŞERBAN observă că problema No. 3831 a mai fost publicată de autor în R. M. T. şi rezolvată în Vol. III, pag. 76 sub No. 713.

Au mai rezolvat problema şi D-nii: M. CREŢU, I. BUCUR, GH. ZAMFIRESCU, N. PĂUN, C. STĂNCESCU, D. NICOLAU, I. VOINEA, CR. GRECU şi D. MIŞCHINEA.

I. L.

*EXERCIŢII

32. Se cer patratele de forma $ababcd$, la care ab şi cd sunt patrate.

GH. A. APOSTOLESCU.

R. Patratele de două cifre fiind 16, 25, 36, 49, 64, 81, se formează numărul $abab00$, i se scoate rădăcina patrată şi se caută a se înlocui 00 cu cifre care să formeze patrat perfect. Găsim soluţia $804^2 = 646416$.

33. Se cere cubul $abbcda$ ştiind că rădăcina lui e dc.

I. C. VOICU.

R. Rădăcina dc e coprinsă între 47 şi 99. După Nota 9 din Volumul XXXIV găsim formele cuburilor : $5bbc75$, $2bbc52$, $6bbc76$, $4bbc84$, $8bbc68$, $3bbc53$, $7bbc57$, $9bbc59$, $3bbc73$, $7bbc77$, $3bbc93$, $7bbc97$, $9bbc99$, $6bbc56$, $4bbc64$, $2bbc72$, $6bbc96$, $9bbc79$, $1bbc81$, $7bbc87$, $9bbc89$. Înlocuim pe c cu valorile compatibile. Se găseşte soluţia $76^3 = 300763$.

34. Se cere patratul $dmszu$ în care dm e patrat, s un număr prim şi suma cifrelor un număr prim.

A. S. BIDOIANU.

R. Numărul dm poate fi 16, 25, 36, 49, 64, 81 iar s poate fi 1, 2, 3, 5, 7. Formăm dms şi alegem zu aşa ca $dmszu$ să iasă patrat perfect. Singura soluţie este $127^2 = 16129$.

35. Fie Φ_1 (N) numărul numerelor (a, b, c) astfel ca :

$$(i, j, N) = 1$$

(a, b, c) fiind *c. m. c. d.* a numerilor a, b, c. Pe urmă :

$$\Phi_2(N) = \Phi_1(\Phi_1) \quad , \quad \Phi_3 = \Phi_1(\Phi_2) \quad , \quad \Phi_4 = \Phi_1(\Phi_3).$$

Ce valori mai mici ca 100 pot luă numerile $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$?

T. P.

R. Avem

$$\Phi_1(N) = N^2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\ldots \qquad \Phi_1(1) = 1.$$

$$N = p^\alpha q^\beta \ldots : \qquad p, q \text{ factori primi.}$$

Din inegalitatea:

$$\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots \qquad > \frac{6}{\pi^2}$$

se deduce uşor că:

$$\Phi_1 = 1,\ 3,\ 8,\ 12,\ 24,\ 48,\ 72,\ 96.$$

$$\Phi_2 = 1,\ 8,\ 48,\ 96.$$

$$\Phi_3 = 1,\ 48.$$

$$\Phi_4 = 1.$$

36. Dacă $a+b+c=0$, avem

$$\frac{4a^3b}{4bc[2(a+b)^2+a(c+b-a)+b(a+c-b)]}+\frac{4b^3c}{4ac[2(b+c)^2+b(a+c-b)+c(a+b-c)]}$$

$$+\frac{4c^3a}{4ab[2(c+a)^2+c(a+b-c)+a(b+c-a)]}=\frac{3}{4}.$$

C. N. Bălăşescu.

R. Dezvoltând la numitoare, făcând calculele, şi ţinând seama de relaţia de condiţie se găseşte că partea întâia are valoarea $\frac{3}{4}$.

37. Într'un triunghiu sferic avem relaţia

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}}{\operatorname{tg} r_a}=\frac{\sin(p-a)}{4\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}.$$

C. V. Costăchescu.

R. Se verifică uşor ţinând seama de relaţiile ce dau valoarea excesului eric şi a razei cercului circumscris şi anume:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}$$

$$\operatorname{tg} r_a=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin(p-a)}.$$

PROBLEME PROPUSE.

*3861. Intrebând pe o doamnă, licenţiată în litere, calculatoare de dobânzi la o bancă, ce metodă întrebuinţează la acele calcule, îmi răspunde:

„Foarte simplu. Iau suma în lei pe care o cere ca împrumut o persoană şi o înmulţesc cu numărul zilelor pânăla ziua fixată pe poliţă pentru achitarea ei, şi dela produs despart trei zecimale. Aceasta este dobânda care se opreşte din suma cerută pentru împrumut". (Autentic).

Cari sunt condiţiunile în cari împrumută acea Bancă?

I. Ionescu.

*3862. Care sunt cuburile cari se termină cu *szu*, ştiind că s^2 se scrie *zu*.

I. V. Măties.

*3863. Să se găsească numărul întreg N ştiind că cifra miimilor rădăcinei patrate, cu aproximaţie de 1/1000 în minus, a numărului $N^2 + N$ este 6.

Col. Gh. Buicliu.

*3864. On donne un cercle (O), un point M sur le cercle et une droite (D) du plan. 1°. Existe-t-il des triangles inscrits à (O), tels que la droite de Simson de M par rapport à ces triangles soit (D)?. 2°. Si le problème est possible, il admet une infinité des solutions. 3°. Montrer que le produit des distances de M aux sommets de ces triangles est constant. 4°. Construire le triangle ABC pour lequel la somme des carrés des côtés est maximum ou minimum.

V. Thébault.

*3865. Fie A', B', C' punctele în care cercul înscris triunghiului ABC atinge laturile *a, b, c*. Fie A_1, B_2, C_3 punctele în cari cercurile exînscrise ating respectiv laturile (iar nu prelungirile), *a, b, c*. Fie Γ şi Γ' punctele lui Gergonne şi Nagel ale triunghiului ABC. Fie Q_1 intersecţia lui B'C' cu B_2C_3 şi Q' a lui B_2C' cu C_3B'; iar Q_2, Q'', Q_3, Q''' punctele analoage deduse prin permutări circulare.

Să se arate că Q', A, Q_2, Q_3, și analoagele lor, sunt colineare; că Q', Q'', Q''' sunt pe dreapta $\Gamma\Gamma'$ și că fiecare din triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1B_2C_3$ sunt $\frac{1}{2}$ din $Q_1Q_2Q_3$.

ATH. RADEV.
(Iamboli, Bulgaria).

*3866. Să se facă rațional numitorul fracției:

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{v}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}}.$$

CĂPITAN I. LINTEȘ.

*3867. Să se rezolve ecuația

$$ab[(a-b)(x^4+2x^2+1)-2(a+b)(x^2+1)x]$$
$$-x(a^2+b^2)[(a-b)(x^2+1)-2(a+b)x]=0.$$

C. COȘNIȚĂ.

*3868. Să se arate că bisectoarea interioară a unghiului A al unui triunghiu ABC este dată și de expresia

$$\alpha=\frac{b\sin C}{\sin(\frac{1}{2}A+C)}.$$

M. GHERMĂNESCU.

*3869. Fie patrulaterul ABCD, la care unghiurile opuse A și C sunt drepte.

Să se demonstreze că există relația

$$AC=BD\sin B.$$

IULIAN ALEXIU.

3870. Fie a și b două numere complexe cu modulele supraunitare.

Să se demonstreze că e imposibil să avem:

$$3(a+b)=2+6ab.$$

P. SERGESCU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. (3771); *Aliman I. V.* (3672, 84, 771, 81); *Aliman N. I.* (2240, 3517, 65, 93, 714, 81, 82, E, N, P, R); *Almăjan I. P.* (3771, E); *Antonescu N.* (3855, 59); *Apostolescu A. Gh.* (3692, 802, 41, 51, P); *Avram N. C.* (3859); *Bandel F. Rubin* (3859); *Berdan C.* (2773, A, N, E, P); *Bidoianu Adr.* (3801); *Boerescu P. Gh.* (3775, 841, 42, 51, R); *Boian C. Ion* (2597, 643, 702, 63, 846, 59, R); *Bolgar V. D.* (3771, 801); *Bucur P. Ioan* (2597, 3602, 13, 93, 752, 71, 801, 11, 41); *Bucur V. I.* (3783); *Călinescu Val. şi Gab.* (3818); *Constantinescu U. M.* (3841, 51); *Costache N. N.* (2440, 3517, 65, 841, 51); *Creţu D. M.* (3752, 81, 802, 41); *Crivăţ V. I.* (3781, 801, 16, 19, 40, 41, 47, E, N); *Curchi I.* (E); *Dan Const.* (3668, 818, 27, 28, 47, 59); *Donciu N.* (3847); *Drăguţ Gh. V.* (3859); *Dumitraşcu N. R.* (3819, 51, 59); *Dumitrescu R.* (3852); *Enică C.* (3842); *Gheorghe P. I.* (3613, 19, 811, 41); *Ghişoiu I. P.* (3089, 837, 41, 43, 51, 52, 54, 55, 57, 59); *Ghiţescu D. A.* (3841, 51, R); *Grecu M. Cr.* (3282, 565, 719, 802, 11, 41); *Heytmanek C.* (3692, 702, 818); *Ioan I. P.* (3819); *Ionescu P. Har.* (3704, 19, 75, 79, 811, 14, 19, 21, 22, 41, 42, 59, E, N, P); *Ionescu-Ţiu D. C.* (3801, 32, 41, 42); *Ionescu Victor* (3813, 19, 26, 39, 40, 46); *Marin D. C.* (2597); *Mircea N. C.* (3565, 714); *Mischinea St. D.* (3802, 41, 42, R); *Mladin I. G.* (3841, 51); *Moţoc D. M.* (2440, 597, 3593, 95, 613, 92, 702, 14, 811, 42, R); *Nachbar H. R.* (P); *Negrea A. M. Leonte* (3859, 60); *Nicolau H. D.* (3714, 92, 801, 02, 41, 51); *Novacu V.* (3809); *Parapeanu C. I.* (3841, 46, 59); *Păun A. N.* (2440, 597, 3672, 752, 83); *Petrică I. I.* (3841, 47); *Popa G. Ion* (3779, 81, 801, 06, 14, 19, 21, 26, 42, 59); *Popescu Al.* (3859); *Popescu M. D.* (2440, 781, 821, 41); *Popescu M. I.* (R); *Purdilă I. A.* (3859); *Râmniceanu I. Cr.* (3732, 58, 75, 79, 818, 19, 39, N); *Răşcanu I. Romeo* (3859, P); *Rentea Gr. N.* (2597, 841, 51); *Rizescu C.* (3824); *Sâmbotin G.* (3839, 41, 46, 59, 60); *Săvescu P. Vintilă* (3860); *Savin C. I.* (3778); *Şerban D.* (2597, E); *Stănescu M. C.* (2597, 3593, 692, 841, R); *Ştefănescu I. C.* (2497, 3692, 811, 41, 51); *Ştefănescu M. Cr.* (3771, 801, 41); *Thébault V.* (A); *Ungheanu I. M.* (3732, 81, 801, 21, 41, 42, E, P, R); *Vâlceanu N. I.* (3818, 47, R); *Vasilescu N. P.* (3792, 801); *Velicescu T.* (3771, 801); *Voicu C. I.* (3595, 781, 801, 41, 42); *Voicu G. N.* (2440, 3565, 841, 51, P); *Zaharia O. N.* (3801, 59, E); *Zamfirescu O. Gh.* (2597, 3752, 81, 802, 41, 59, 60).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer Inspector General **C. Malcoci,** Directorul General al Exploatării Monopolurilor (adresa: Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.